Ángel Homero Flores • Adriana Gómez • Alex Emmanuel Hernández • José María Sánchez

# Convive con las Matemáticas 3

Serie Convive

MÉNDEZ CORTÉS EDITORES

Educación Secundaria
TERCER GRADO

DATOS PARA CATALOGACIÓN BIBLIOGRÁFICA

Flores Samaniego, Ángel Homero,
Adriana Gómez Reyes, Alex Emmanuel
Hernández Torres y José María Sánchez García
**Convive con las Matemáticas 3**
Tercer grado de Educación Secundaria
Tamaño: 20.5 x 27 cm
248 páginas
**Méndez Cortés Editores, S.A. de C.V.**
México, 2017
ISBN: 978-607-7732-54-9

DR © 2014

**Méndez Cortés Editores, S.A. de C.V.**
Tenayuca Núm. 152, Col. Letrán Valle,
C.P. 03650, Ciudad de México.
Tel.: (55) 5538-4143

Miembro Núm. 3557 de la Cámara Nacional
de la Industria Editorial Mexicana

**Convive con las Matemáticas 3**
Tercer grado de Educación Secundaria
Por: Flores Samaniego, Ángel Homero, Adriana Gómez Reyes,
Alex Emmanuel Hernández Torres y
José María Sánchez García

**ISBN (serie completa):** 978-607-7732-23-5
**ISBN:** 978-607-7732-54-9

Primera Edición: 2015
Primera reimpresión de la primera edición: 2016
Segunda Edición: 2017

**Editado por: EdiMend, S.A. de C.V.**
**Dirección general:** Francisco Méndez Gutiérrez
**Dirección editorial:** Alberto García Rodríguez
**Gerencia de contenidos**: Gabriela Ramírez Salgado
**Coordinación de contenidos:** Mariana Calero Sánchez
**Coordinación editorial:** Angélica C. Sánchez Celaya
**Revisión y cuidado editorial:** Mónica Huitrón Vargas
**Asistente editorial:** Ricardo I. Torres Ferrer
**Edición:** Sócrates Bárcenas Armendáriz
**Revisión técnica:** Jesús Manuel Hernández Soto y Vicente Zimbrón Jiménez
**Diseño y formación:** Mario A. Tenorio Murillo, René Piedra Tenorio y Mayra Alvarado López
**Corrección de estilo:** Agustín Cervantes Aguilar
**Iconografía:** Beatriz Mendoza Alvarez
**Ilustraciones:** Martín Avilés Ramírez

Este libro se terminó de imprimir en los talleres
de Grupo Ajusco, S.A. de C.V., José Ma. Agreda y Sánchez 223,
Col. Tránsito, C.P. 06820, Ciudad de México.

**www.mc-editores.com.mx**



**IMPRESO EN MÉXICO**
**PRINTED IN MEXICO**





# Presentación

El aprendizaje de cualquier asignatura se logra mejor cuando se experimenta. Las actividades y las situaciones problemáticas que ponemos a tu disposición en *Convive con las Matemáticas 3* se basan en la enseñanza mediante la resolución de problemas un modelo centrado en el estudiante y su aprendizaje. Parte fundamental del modelo es la organización de los aprendizajes en actividades de enseñanza y evaluación. Estas actividades se encuentran distribuidas en tres secciones: *Lo que sé*, *Practicando lo aprendido* y *Aplicando lo aprendido*.

En la primera, *Lo que sé*, se presenta una serie de problemas y actividades encaminadas a ordenar los conocimientos previos del estudiante en relación con el contenido que se va a abordar, al mismo tiempo que sirve al profesor como un diagnóstico que le permitirá planear mejor sus sesiones de clase.

*Practicando lo aprendido* tiene la intención de introducir al estudiante en el contenido en cuestión mediante actividades y problemas en los que se irán adquiriendo los conocimientos previstos a través de la aplicación y la ampliación de los conocimientos previos.

Finalmente, en *Aplicando lo aprendido* se presentan problemas y actividades en los que el estudiante pone en práctica lo recordado y lo aprendido en las dos secciones anteriores, dando un panorama más amplio del contenido.

Como apoyo adicional al que da el profesor a sus estudiantes, se tienen secciones periféricas que ayudan a fortalecer el conocimiento que se va construyendo, para aplicar las matemáticas en otros ámbitos como la literatura, la arquitectura y otras ciencias, sin olvidar situaciones cotidianas que apuntan a resaltar la presencia y la importancia de las matemáticas en la vida diaria.

Cada bloque termina con una serie de problemas cuya resolución por parte del estudiante permite al profesor hacer una evaluación un poco más detallada del conocimiento adquirido por sus estudiantes, al tiempo que da a estos últimos una oportunidad de hacer una evaluación de su propio desempeño.

Toda esta estructura constituye una secuencia didáctica cuyo seguimiento dará al estudiante la oportunidad de aprender matemáticas de una manera más significativa.

**Los autores**

## Al estudiante

¿Para qué sirven las matemáticas? Podría decirse, en pocas palabras, que sirven para resolver las necesidades prácticas de la vida cotidiana, como contar y medir. Están presentes en todo lo que nos rodea y son como el aire: invisibles, útiles e imprescindibles en nuestra vida.

Las matemáticas tienen un fundamento científico, pues son de utilidad para explicar fenómenos y entender situaciones; son una herramienta, porque sirven para hacer las cosas más fáciles y accesibles; son un lenguaje, pues nos ayudan a comunicar ideas.

El libro que hoy ponemos en tus manos fue planeado con el propósito de hacer de esa convivencia con las matemáticas una experiencia enriquecedora, de modo que tengas una idea propia de lo que es esta ciencia y te acerques a ella y pongas en práctica sus aplicaciones.

*Convive con las Matemáticas 3*, además de ser un libro de texto para la asignatura de Matemáticas de tercer año de secundaria, te ayudará a resolver problemas y orientarte en cualquier situación en la que debas tomar decisiones, sin importar qué tan duras o difíciles puedan ser.

**Los autores**

## Al profesor

Estimado colega, la profesión que hemos escogido es una de las más nobles y difíciles que existen. De nosotros depende dignificarla y darle el estatus que merece en la sociedad. Para que toda labor docente tenga la efectividad necesaria y rinda los frutos que deseamos, debemos partir de una premisa: nuestro trabajo tiene que ver con la educación de seres humanos en formación.

Por su parte, la docencia en el nivel de secundaria es especialmente difícil porque los estudiantes, como adolescentes que son, están buscando su lugar en la vida y en la sociedad, en un mundo adverso para el aprendizaje escolar, en general, y para las matemáticas en particular.

Una manera de hacer que las matemáticas sean accesibles para los estudiantes y que éstos aprendan a valorarlas en toda su extensión, es favorecer que el aprendizaje se lleve a cabo mediante la práctica, es decir, propiciar que relacionen las matemáticas con los aspectos de su vida cotidiana y que convivan con ellas. El libro que le presentamos, *Convive con las Matemáticas 3*, está diseñado para que sus alumnos aprendan la asignatura mediante un aprendizaje significativo que fortalezca su pensamiento matemático.

Un aspecto importante para conocer el desempeño escolar, tanto por parte del profesor como de los estudiantes, es la evaluación. Respecto de las matemáticas, nos apegamos al concepto de *evaluar para aprender*, es decir, se refiere a lo que en otros contextos se conoce como evaluación formativa, que tiene el principal propósito de recabar información que nos ayude a mejorar la práctica docente a través de una retroalimentación adecuada. A su vez, los instrumentos de evaluación (léase listas de cotejo, mapas conceptuales, rúbricas, bitácoras e historias de vida, sólo por nombrar algunos) nos van a servir para procesar la información obtenida.

En este contexto, el desarrollo de las actividades y la resolución de los problemas que componen las secuencias didácticas de *Convive con las Matemáticas 3* proporcionan la información adecuada sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje, respecto del desempeño del estudiante y la construcción de su conocimiento. Pero, analizada desde otras perspectivas, esta misma información arroja luz sobre nuestro propio desempeño docente y sobre la pertinencia del currículo de matemáticas.

En *Convive con las Matemáticas 3* se privilegia el trabajo colaborativo de los estudiantes, pues es una manera de avanzar y convivir al mismo tiempo, y de ir uniformando su conocimiento. Lo mismo debe ser válido para los docentes, el trabajo colaborativo entre profesores enriquece nuestra labor y significa un paso gigantesco hacia el logro de objetivos. Le recomendamos ampliamente que revise el material que le presentamos y resuelva con sus colegas los problemas de manera colegiada, en un afán de hacer una planificación conjunta de clases; de esta manera avanzaremos todos en la misma dirección: la excelencia en la enseñanza y el aprendizaje de los alumnos.

**Los autores**





Mediante ejemplos y descripciones puntuales te presentamos las diferentes partes que conforman tu libro, para que puedas identificarlas y conozcas la manera en que está organizado.


### Entrada de bloque

Al inicio de cada bloque encontrarás una imagen representativa de los temas que verás en dicho bloque. También se señalan las competencias que se favorecen y los aprendizajes esperados que lograrás al terminar el estudio del bloque.

### Modalidad de la actividad

Individual

Pareja

Equipo

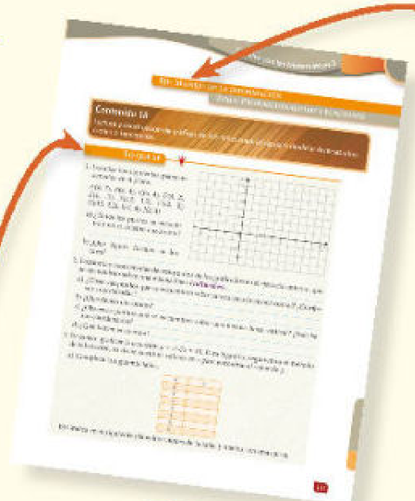
Grupo

### Matemáticas con otras ciencias

En este apartado te indicamos la relación que tienen las Matemáticas con otras asignaturas.

### Lo que sé

Esta sección se relaciona con la primera fase de la secuencia didáctica. Aquí te planteamos una serie de preguntas para que recuerdes conocimientos ya aprendidos.



### Ejes temáticos

Se consideran tres ejes:

- Sentido numérico y pensamiento algebraico
- Forma, espacio y medida
- Manejo de la información

La finalidad de estos tres ejes es que aprendas a utilizar los números y las operaciones en distintos contextos para que puedas modelar situaciones y las resuelvas mediante el lenguaje matemático.

### Libroteca

En este apartado el alumno encontrará sugerencias acerca de lecturas que despertarán su interés por el estudio de las matemáticas, las cuales podrá encontrar en la Biblioteca de Aula o en la Escolar.

### El rincón matemático

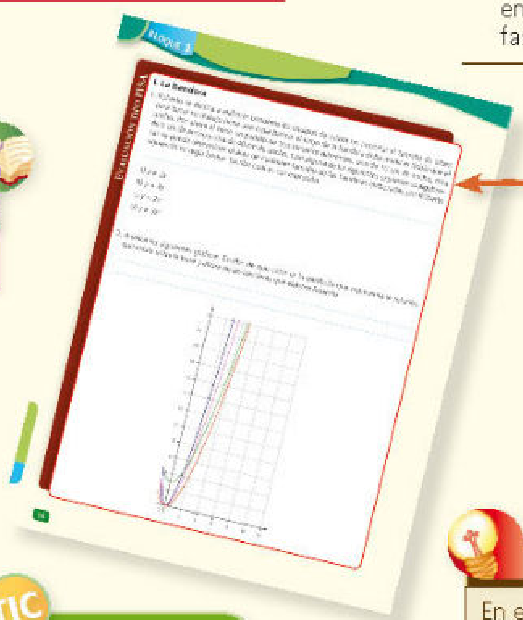
Para comprender nuevos temas es pertinente saber cómo surgen y por qué. En este rincón te brindamos los conocimientos teóricos necesarios para desarrollar el contenido.

## PRACTICANDO LO APRENDIDO

Aquí encontrarás actividades y ejercicios con un mayor grado de dificultad, lo cual te permitirá practicar lo que has aprendido. El contenido de esta sección se asocia con la segunda fase de la secuencia didáctica. Su estructura también se compone de inicio, desarrollo y cierre.

## APLICANDO LO APRENDIDO

Con los ejercicios y actividades que aquí te presentamos podrás poner en práctica los conocimientos y habilidades adquiridos, logrando con ello consolidar los aprendizajes esperados. Lo aplicado en esta sección se considera la tercera fase de la secuencia didáctica.



**Glosario**

Te ofrece la definición de términos nuevos o de difícil comprensión.

## Evaluación tipo PISA

Al final de cada bloque incluimos una evaluación tipo PISA, para que pongas en práctica lo que has aprendido, y, al mismo tiempo, el profesor valore tus conocimientos.

**TIC**

En esta sección encontrarás recomendaciones para que consultes páginas electrónicas en las que obtendrás información de los temas desarrollados en tu libro. Con la realización de las actividades sugeridas podrás reafirmar tus conocimientos.

**Saber más...**

En esta sección conocerás datos curiosos o información adicional sobre el tema que estás aprendiendo o que se relacione con algún personaje famoso por sus conocimientos en las Matemáticas.

**BLOQUE 1** Competencias que se favorecen: Resolver problemas de manera autónoma. Comunicar información matemática. Validar procedimientos y resultados. Manejar técnicas eficientemente.

| Semana | Aprendizajes esperados | Eje | Tema | Contenido | Página |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Explica la diferencia entre eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes. | Sentido numérico y pensamiento algebraico | Patrones y ecuaciones | Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas. | 14 |
| 2 | | | | | |
| 3 | | Forma, espacio y medida | Figuras y cuerpos | Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades. | 18 |
| 4 | | | | Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada. | 23 |
| 5 | | Manejo de la información | Proporcionalidad y funciones | Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad. | 29 |
| 6 | | | | Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la Física, la Biología, la Economía y otras disciplinas. | 36 |
| 7 | | | Nociones de probabilidad | Conocimiento de la escala de la probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes. | 42 |
| 8 | | | Análisis y representación de datos | Diseño de una encuesta o un experimento e identificación de la población en estudio. Discusión sobre las formas de elegir el muestreo. Obtención de datos de una muestra y búsqueda de herramientas convenientes para su presentación. | 49 |
| 9 | | | | | |
| 10 | EVALUACIÓN SUMATIVA | | | | |

**BLOQUE 2** Competencias que se favorecen: Resolver problemas de manera autónoma. Comunicar información matemática. Validar procedimientos y resultados. Manejar técnicas eficientemente.

| Semana | Aprendizajes esperados | Eje | Tema | Contenido | Página |
|---|---|---|---|---|---|
| 11 | Explica el tipo de transformación (reflexión, rotación o traslación) que se aplica a una figura para obtener la figura transformada. | Sentido numérico y pensamiento algebraico | Patrones y ecuaciones | Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización. | 60 |
| 12 | | Forma, espacio y medida | Figuras y cuerpos | Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras. | 71 |
| 13 | | | | Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras. | 80 |

| Semana | Aprendizajes esperados | Eje | Tema | Contenido | Página |
|---|---|---|---|---|---|
| 14 | Identifica las propiedades que se conservan.<br>Resuelve problemas que implican el uso del teorema de Pitágoras. | | Medida | Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo. | 86 |
| 15 | | | | Explicitación y uso del teorema de Pitágoras. | 91 |
| 16 | | Manejo de la información | Nociones de probabilidad | Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma). | 96 |
| 17 | EVALUACIÓN SUMATIVA | | | | |

**BLOQUE 3** Competencias que se favorecen: Resolver problemas de manera autónoma. Comunicar información matemática. Validar procedimientos y resultados. Manejar técnicas eficientemente.

| Semana | Aprendizajes esperados | Eje | Tema | Contenido | Página |
|---|---|---|---|---|---|
| 18 | Resuelve problemas que implican el uso de ecuaciones de segundo grado.<br>Resuelve problemas de congruencia y semejanza que implican utilizar estas propiedades en triángulos o en cualquier figura. | Sentido numérico y pensamiento algebraico | Patrones y ecuaciones | Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones. | 106 |
| 19 | | Forma, espacio y medida | Figuras y cuerpos | Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas. | 111 |
| 20 | | | | Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales. | 119 |
| 21 | | | | Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas. | 125 |
| 22 | | Manejo de la información | Proporcionalidad y funciones | Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos. | 131 |
| 23 | | | | Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera. | 136 |
| 24 | | | Nociones de probabilidad | Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto). | 142 |
| 25 | EVALUACIÓN SUMATIVA | | | | |

**BLOQUE 4** Competencias que se favorecen: Resolver problemas de manera autónoma. Comunicar información matemática. Validar procedimientos y resultados. Manejar técnicas eficientemente.

| Semana | Aprendizajes esperados | Eje | Tema | Contenido | Página |
|---|---|---|---|---|---|
| 26 | Utiliza en casos sencillos expresiones generales cuadráticas para definir el enésimo término de una sucesión. | Sentido numérico y pensamiento algebraico | Patrones y ecuaciones | Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión. | 150 |
| 27 | | Forma, espacio y medida | Figuras y cuerpos | Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo.<br>Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos. | 156 |



DOSIFICACIÓN DE CONTENIDOS

| Semana | Aprendizajes esperados | Eje | Tema | Contenido | Página |
|---|---|---|---|---|---|
| 28 | Resuelve problemas que implican el uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.<br>Calcula y explica el significado del rango y la desviación media. | | Medida | Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente. | 163 |
| 29 | | | | Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo. | 170 |
| 30 | | | | Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente. | 176 |
| 31 | | Manejo de la información | Proporcionalidad y funciones | Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa. | 182 |
| 32 | | | Análisis y representación de datos | Medición de la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media).<br>Análisis de las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión. | 189 |
| 33 | EVALUACIÓN SUMATIVA | | | | |

**BLOQUE 5** Competencias que se favorecen: Resolver problemas de manera autónoma. Comunicar información matemática. Validar procedimientos y resultados. Manejar técnicas eficientemente.

| Semana | Aprendizajes esperados | Eje | Tema | Contenido | Página |
|---|---|---|---|---|---|
| 34 | Resuelve y plantea problemas que involucran ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones y ecuaciones de segundo grado.<br>Resuelve problemas que implican calcular el volumen de cilindros y conos o cualquiera de las variables que intervienen en las fórmulas que se utilicen. Anticipa cómo cambia el volumen al aumentar o disminuir alguna de las dimensiones.<br>Lee y representa, gráfica y algebraicamente, relaciones lineales y cuadráticas.<br>Resuelve problemas que implican calcular la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes. | Sentido numérico y pensamiento algebraico | Patrones y ecuaciones | Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulación de problemas a partir de una ecuación dada. | 200 |
| 35 | | Forma, espacio y medida | Medida | Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto. | 207 |
| 36 | | | | Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides. | 216 |
| 37 | | | | Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas. | 221 |
| 38 | | Manejo de la información | Proporcionalidad y funciones | Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades. | 229 |
| 39 | | | Nociones de probabilidad | Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables. | 238 |
| 40 | EVALUACIÓN SUMATIVA | | | | |

## Competencias que se favorecen:

- Resolver problemas de manera autónoma.
- Comunicar información matemática.
- Validar procedimientos y resultados.
- Manejar técnicas eficientemente.





# BLOQUE 1

### Aprendizaje esperado

- Explica la diferencia entre eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

EJE: SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO

TEMA: PATRONES Y ECUACIONES

## Contenido 1

Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas.

### LO QUE SÉ

1. Analiza cada una de las siguientes situaciones, y en tu cuaderno plantea la ecuación que te permita resolverlas. Si lo deseas, puedes utilizar calculadora.

   a) María tiene 297 canicas, le faltan 3 para tener 5 bolsas completas y a cada bolsa le cabe la misma cantidad. ¿Cuántas canicas contiene cada bolsa? ________
   - ¿Cómo representaste la cantidad de canicas de cada bolsa? ________
   - ¿De qué grado es la ecuación que planteaste? ________

   b) Ramiro compró cuatro libretas y dos lápices. El precio de cada libreta es el triple del de un lápiz. Si pagó $63 por los seis artículos, ¿cuánto pagaría por media docena de libretas como las que compró? ________
   - ¿De qué otra forma se pudo haber resuelto el problema? ________

   c) Andrea tiene 7 monedas, algunas de cinco y otras de dos pesos y sabe que trae 20 pesos en total. ¿Cuántas monedas de cada denominación trae? ________
   - ¿Cómo resolviste este problema? ________
   - ¿Qué métodos de solución para sistemas de ecuaciones $2 \times 2$ conoces? ________

   d) El área de un rectángulo es de 90 cm². Si la base mide 18 cm, ¿cuánto mide su altura? ________
   - ¿Cómo se calcula el área de un rectángulo? ________
   - Si en lugar de rectángulo fuera un triángulo, ¿cómo habrías calculado la altura?



2. Compara tus planteamientos y respuestas con los de otros compañeros, reflexiona sobre las diferencias que encuentren y hagan modificaciones si es necesario. Ahora contesten las siguientes preguntas.

   a) ¿De qué grado son las ecuaciones que plantearon? ________

   b) ¿Cómo se resuelve una ecuación como las que plantearon? ________

   c) Si hay alguna otra forma de resolver las ecuaciones que plantearon, escriban sus procedimientos. ________

**Libroteca**

Para complementar más el tema te recomendamos leer el libro:

Wylie, C. R., *101 desafíos a la lógica*, México, SEP-Suromex, 2005. Puedes encontrarlo en los Libros del Rincón.

3. Con la ayuda de su profesor, reflexionen sobre cómo se plantea una ecuación y la forma de resolverla. Escriban sus conclusiones en las siguientes líneas.

### PRACTICANDO LO APRENDIDO

1. Formen equipos de dos integrantes para que analicen y resuelvan en su cuaderno las siguientes situaciones.

   a) Alberto mandó imprimir una lona para su negocio. Si la publicidad es rectangular y tiene un área de 24 m², ¿cuáles son las dimensiones de la lona?

   b) Lourdes tiene que colocar el piso de su cuarto. Éste tiene un área de 24 m², y de ancho mide 2 m menos que de largo. ¿Cuáles son la **dimensiones** del cuarto de Lourdes?

**Glosario**

**Dimensión.** Es la longitud, área o el volumen de una línea, una superficie o un cuerpo, respectivamente.

   c) ¿Qué diferencia encuentran entre este problema y el anterior?

   d) Se muestra a continuación la tapa de una caja que tiene 70 cm² de área. ¿Cuáles son las dimensiones de esta tapa?

   e) ¿Cómo están expresadas las dimensiones de la caja?

   f) ¿La $x$ puede ser cualquier valor?

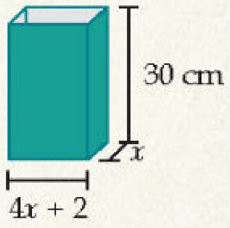
2. Comparen sus resultados y procedimientos con los de otras parejas y reflexionen sobre las diferencias que encuentren. Luego contesten las siguientes preguntas.
   a) ¿Cómo resolvieron los problemas anteriores? ______

   b) ¿Qué diferencias hay entre estos problemas y los que resolvieron en la sección *Lo que sé*?

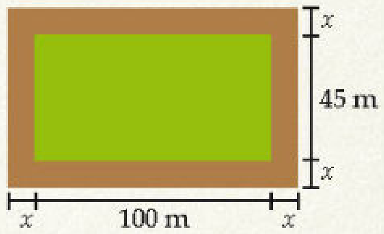
   c) ¿De qué grado piensan que son las ecuaciones con las que se resuelven este tipo de problemas? ______
   d) ¿Cómo piensan que se pueden resolver este tipo de ecuaciones? ______

3. De manera grupal y con la ayuda de su profesor, analicen los diferentes procedimientos que emplearon para resolver los problemas. Consideren si son adecuados para todas las ecuaciones de este tipo, y en las siguientes líneas escriban una conclusión sobre cómo resolverlas.

4. Individualmente, analiza y resuelve los siguientes problemas. Si es posible, emplea el procedimiento con el que concluyeron la actividad anterior.
   a) El producto de las edades de Alberto y Lourdes es 750 años. Si él es mayor que ella por 5 años, ¿cuál es la edad de cada uno de ellos? ______
   b) Andrés quiere saber las dimensiones de la base de una caja de cereal, como la que se muestra en la imagen de la derecha; además, sabe que el volumen de ésta es de 3 300 $cm^3$. ¿Cuánto mide el largo de esta caja? ______




   c) La cancha comunal de San Juan se va a enrejar, para ello se realizó el esquema de la derecha. El bardeado cubrirá un área de 5 096 $m^2$, es decir, la cancha y la zona de arena. ¿Cuáles son las dimensiones que tendrá el enrejado? ______




Compara tus resultados con los de otros compañeros y reflexionen sobre las diferencias que encuentren.

**TIC**

Para reforzar lo visto en esta lección, visita la siguiente página electrónica y analiza cómo se resuelven los ejercicios que ahí se muestran.
Se encuentra disponible en:
http://ponce.inter.edu/cremc/cuadratica.html
(Consulta: 4 de diciembre de 2016.)
Comenten, en equipo, qué les pareció la actividad e inventen sus propios juegos.





5. Ahora, contesta las siguientes preguntas.
   a) ¿De qué otra manera puede resolverse este tipo de problemas? ______

   b) ¿Cómo se puede comprobar que sus resultados son correctos? ______

Con la ayuda de su profesor, comprueben si el procedimiento empleado es adecuado para este tipo de ecuaciones.

## APLICANDO LO APRENDIDO

1. Reúnanse en parejas para que analicen y resuelvan los siguientes problemas.
   a) Alberto compró cierta cantidad de pelotas, gastó \$360 y sólo sabe que el precio de cada una es menor en dos unidades respecto a la cantidad de piezas que compró. ¿Cuánto tendría que pagar sólo por una docena de pelotas? ______
   b) Alfredo mandó templar un vidrio para la mesa de su cocina. Por este trabajo pagó \$1 440 y el metro cuadrado de vidrio templado cuesta \$800. Si el ancho de la mesa es 1.1 m menor que el largo, ¿cuáles son las dimensiones de la mesa? ______
   c) Para alimentar cierta cantidad de vacas durante un día, se requieren tres pacas de alimento menos que el número de rumiantes que se tienen. Si se ocupan 280 pacas durante una semana, ¿cuántas vacas hay que alimentar? ______

Comparen sus resultados con los de otros compañeros y reflexionen sobre las diferencias que encuentren. Con la ayuda de su profesor, comprueben si sus resultados son correctos.

## EL RINCÓN MATEMÁTICO

Las ecuaciones de segundo grado o cuadráticas son aquellas igualdades cuyo máximo exponente de alguna de sus incógnitas es 2; además, son de la forma $ax^2 + bx + c = 0$. Cuando tienen sus tres términos se conocen como ecuaciones *completas*, y cuando falta el término lineal o independiente, se les llama *incompletas*. Este tipo de ecuaciones se pueden resolver por medio de operaciones inversas, por factorización o por fórmula general.

Por ejemplo, al resolver la ecuación:

$x^2 = 400$ La operación inversa de elevar al cuadrado es la raíz cuadrada.

$x = +20$
$x = -20$ Toda raíz cuadrada tiene dos raíces, una positiva y una negativa.

**TIC**

Para reforzar lo visto en esta lección, visita la siguiente página electrónica y analiza cómo se resuelven los ejercicios que ahí se muestran.
Se encuentra disponible en:
http://cuaed.unam.mx/math_media/algebra/fact_trinomio/index.php
(Consulta: 4 de diciembre de 2016.)
Compara tus resultados con los de otro compañero y solicita la ayuda de tu profesor para verificar que tus respuestas son correctas.

Eje: Forma, espacio y medida

Tema: Figuras y cuerpos

## Contenido 2

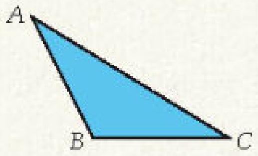
Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades.

### Lo que sé

1. Lee con atención cada una de las siguientes instrucciones y realiza lo que se te pide.

a) En el siguiente espacio, traza un triángulo cuyos lados midan 4 cm, 3 cm y 5 cm.

b) Traza un triángulo igual al triángulo azul.




c) Traza un cuadrado y un rectángulo que tengan la misma área.

2. Contesta las siguientes preguntas.

a) ¿Cómo se traza un triángulo? ____________________

b) ¿Cómo se traza un cuadrado? ____________________

c) Si se les pide a varios de tus compañeros que tracen un triángulo isósceles, ¿crees que al compararlos será el mismo triángulo que se les solicitó? ____________

- ¿Por qué? ____________________





3. Compara tus respuestas y trazos con los de tus compañeros, reflexionen sobre las diferencias que encuentren, luego, bajo la orientación de su profesor, escriban la forma correcta de trazar un triángulo y un cuadrado.

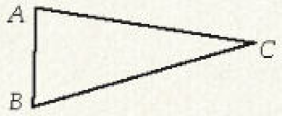
### Practicando lo aprendido

1. Realicen las siguientes actividades en parejas y contesten las preguntas.

a) Andrés construyó, con madera, un triángulo equilátero de 5 cm por lado. Ahora ustedes dibujen otro con las mismas medidas.

b) Tracen un triángulo con los puntos $ABC$, donde $AB$ tenga una longitud de 4 cm y los ángulos $A$ y $B$ tengan la misma amplitud.

c) Raúl debe trazar dos triángulos a partir del triángulo mostrado en la siguiente imagen. Uno debe medir el doble de lo que mide el original y el otro debe medir la mitad en cada uno de sus lados. Ayúdenle a Raúl a trazar los dos triángulos requeridos en el siguiente espacio.




2. Comparen sus triángulos con los de otros compañeros y contesten las siguientes preguntas.

a) ¿Cómo es su triángulo equilátero y el de sus compañeros? ____________________

- ¿Por qué? ______

b) ¿Qué nombre recibe el triángulo que trazaron en el inciso b? ______

c) ¿Cuánto suma la amplitud de los tres ángulos internos de cualquier triángulo?

______

d) El tercer triángulo que trazaron tiene la misma forma, pero no el mismo tamaño. ¿Cuántas veces cabe la longitud de $AB$ en el lado homólogo del triángulo mayor? ______

e) ¿Ocurre lo mismo con el resto de los lados del primer triángulo con su homólogo en el triángulo mayor? ______

f) En el inciso a, trazaron dos triángulos congruentes entre sí. Expliquen por qué son congruentes dos triángulos. ______

______

g) En el inciso c, los triángulos son semejantes. ¿Por qué decimos que son semejantes?

______

3. Comparen sus respuestas con las de sus compañeros y reflexionen sobre las diferencias que hayan encontrado. Con la ayuda de su profesor, lleguen a una conclusión respecto a cuándo son congruentes dos triángulos y cuándo son semejantes. Escriban sus conclusiones en las siguientes líneas.

______

______

______

**Saber más...**

¿Sabías que los triángulos son herramientas eficaces para la arquitectura y se utilizan en el diseño de los edificios y otras estructuras, ya que proporcionan resistencia y estabilidad? Cuando se utilizan materiales de construcción para formar un triángulo, el diseño tiene una gran base y el pináculo de la parte superior es capaz de administrar el peso porque la energía se distribuye a través de todo el triángulo. Ésta es la razón por la que muchos hogares residenciales tienen cabreadas, que son vigas transversales y proporcionan una estructura robusta. El triángulo en la arquitectura data de hace más años que otras formas comunes, como el domo, arco, cilindro, e incluso es anterior a la rueda. La imagen que presentamos muestra una foto del Museo del Louvre, en Francia, cuya simetría ayuda a distribuir el peso de la construcción.

FUENTE: http://www.ehowenespanol.com/triangulos-usados-arquitectura-info_129100/ (Consulta: 4 de diciembre de 2016.)





4. Analicen y resuelvan la siguiente situación y contesten las preguntas.

a) Ana, la arquitecta, tiene que hacer el plano de una casa. Cada metro lo representará en el plano con 1 cm. La cocina será de forma cuadrada y debe medir 4 m por lado, la sala será de forma rectangular y deberá medir 9 m de largo por 5 m de ancho. En el siguiente espacio tracen las representaciones de la sala y la cocina.

**Saber más...**

La participación femenina en el mundo laboral es una muestra de la evolución social con respecto al rol que representa este sector de la sociedad, incluso a pesar de que se estima que el trabajo más arduo consiste en ejercer con plenitud sus derechos constitucionales y legales, aunque para lograr tal objetivo se requiere modificar la cultura social, algo que podrá llevarse a cabo en el futuro por medio de la educación.

FUENTE: "La participación", Universidad de Zacatecas, recuperado de http://www.uaz.edu.mx/cippublicaciones/ricvol4num2tomo2/Laparticipacion.pdf (Consulta: 4 de diciembre de 2016.)

b) ¿Son congruentes la superficie de la cocina y la representación que hicieron? ______

- ¿Por qué? ______

______

c) ¿Son congruentes el rectángulo de la sala y el que ustedes trazaron? ______

- ¿Por qué? ______

______

d) ¿Qué información se necesita para saber si dos cuadrados son semejantes?

______

- ¿Por qué? ______

______

e) ¿Qué información se necesita para saber si dos rectángulos son semejantes?

______

- ¿Por qué? ______

______

5. Comparen sus respuestas con las de otros compañeros y reflexionen sobre las diferencias que encuentren; además, intercambien opiniones respecto a cómo saber si dos rectángulos son semejantes o si lo son dos cuadrados. Escriban sus conclusiones en las líneas siguientes.

______

______

______

**TIC**

Para reforzar lo visto en esta lección, visita la siguiente página electrónica en la que podrás realizar algunos ejercicios. Se encuentra disponible en:

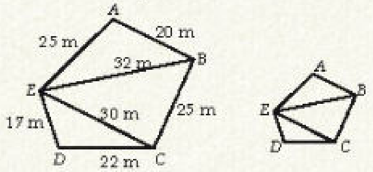
http://www.disfrutalasmatematicas.com/algebra/ecuaciones-cuadraticas.html
(Consulta: 4 de diciembre de 2016.)

Comenta con tus compañeros tus impresiones acerca del contenido de la página.

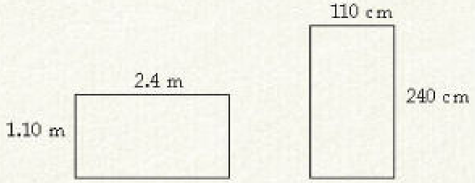
## APLICANDO LO APRENDIDO

1. Reúnanse en equipos y resuelvan las siguientes situaciones.

a) Julio trazó en una hoja la ruta de evacuación que deben seguir, en caso de emergencia, a partir del punto *E*, y señaló las medidas reales; después trazó en una hoja la misma ruta, sólo que ahora representó cada metro con 0.5 cm. Ambas figuras son semejantes. Escriban sobre la figura las dimensiones del nuevo modelo.




b) Martín, el carpintero, trazó la figura de la derecha y su ayudante trazó la figura de la izquierda. Ambas representan una mesa que tienen que fabricar. Pero hay un problema, Martín dice que no son congruentes. ¿Piensan que Martín tiene razón?

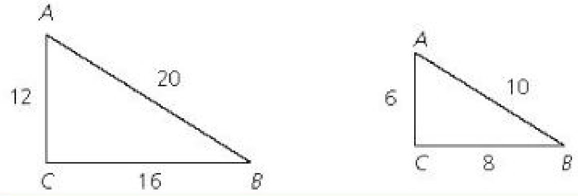



- ¿Por qué?

2. Comparen sus respuestas con las de otros compañeros y argumenten su opinión. Discutan los aspectos que deben considerarse para determinar si dos triángulos que son semejantes también son congruentes. Escriban sus conclusiones en las líneas siguientes.

## EL RINCÓN MATEMÁTICO

Dos figuras son congruentes entre sí, si tienen la misma forma y tamaño. La congruencia se indica con el símbolo ≅. Por otro lado, son semejantes si la longitud de sus lados homólogos son proporcionales, es decir, si al determinar la razón entre sus lados homólogos, hay una constante de proporción y se indica con el símbolo ∽. Por ejemplo, observen la siguiente figura.




Al dividir la longitud de sus lados homólogos, el cociente siempre es 2, por lo que se puede afirmar que estos dos triángulos son semejantes.





EJE: FORMA, ESPACIO Y MEDIDA

TEMA: FIGURAS Y CUERPOS

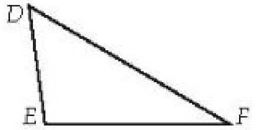
## Contenido 3

Explicitación de los criterios de **congruencia** y **semejanza** de triángulos a partir de construcciones con información determinada.

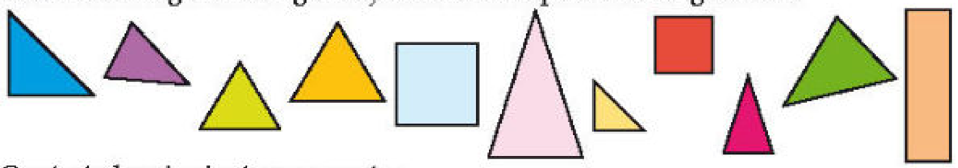
## LO QUE SÉ

1. Realiza lo que se indica en cada inciso.

a) Traza un triángulo semejante al siguiente, de modo que sus lados midan el doble de lo que miden los del triángulo *DEF*.




b) Observa las siguientes figuras y encierra las que sean congruentes.



c) Contesta las siguientes preguntas.

- ¿Cuándo son congruentes dos triángulos?
- ¿Cuándo son semejantes dos triángulos?
- ¿Por qué todos los cuadrados son semejantes?

2. Compara tus respuestas con las de otro compañero y reflexionen sobre las diferencias que encuentren. Con la ayuda de su profesor, determinen las características de congruencia y semejanza entre dos figuras. Anoten sus conclusiones en las líneas siguientes.

## PRACTICANDO LO APRENDIDO

1. Realiza lo que se indica en cada inciso.

a) Un carpintero tiene que construir portavasos de forma triangular y la única indicación que recibió es que uno de sus lados mida 5 cm. Él tiene varios ayudantes y cada uno de ellos construyó un portavasos diferente. En el siguiente espacio, traza un triángulo con la forma que creas que debe tener el objeto requerido. Compáralo con los que trazaron otros compañeros.

- ¿Tienen la misma forma y tamaño los portavasos trazados por tus compañeros? ______
- ¿Cuántos triángulos diferentes se podrán trazar si sólo se proporciona la longitud de uno de sus lados? ______

b) En un segundo pedido, el carpintero recibió del cliente las medidas para dos lados del portavasos, éstas son 4 cm y 5 cm. Nuevamente, sus ayudantes construyeron los portavasos por separado. Traza el triángulo resultante basándote en la información que se proporciona y compáralo con los trazos de otros compañeros.

- Explica si los portavasos que trazaron tienen la misma forma y tamaño. Responde en tu cuaderno.
- ¿Cuántos triángulos diferentes se podrán trazar si sólo se proporciona la longitud de dos de sus lados? Responde en tu cuaderno.
- Si el carpintero quiere que los portavasos sean congruentes, ¿qué información debe solicitar al cliente respecto a la longitud de sus lados? Responde en tu cuaderno.

c) Alma hizo un pedido más al mismo carpintero y pidió que los portavasos tuvieran las siguientes longitudes: 6 cm, 5 cm y 4 cm. Traza el triángulo resultante y compáralo con los que trazaron otros compañeros.

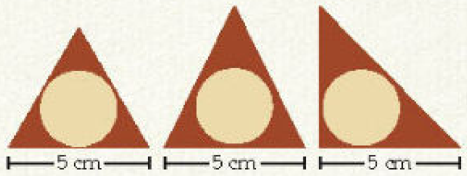




- Explica si los portavasos que trazaron tienen la misma forma y tamaño. ______
- ¿Cuántos triángulos diferentes se podrán trazar si se proporciona la longitud de sus tres lados? ______
- Alberto es uno de los ayudantes del carpintero, y asegura que si le proporcionan sólo la medida de un lado para elaborar un portavasos en forma de triángulo equilátero, todos los portavasos que construyan los demás ayudantes serán congruentes. ¿Crees que Alberto tiene razón? ______ ¿Por qué? ______

Compara tus respuestas con las de otros compañeros y reflexionen sobre las diferencias que encuentren. Además, con la ayuda de su profesor discutan sobre cuántos lados necesitan conocer para trazar triángulos que sean congruentes entre sí. Escriban su conclusión a continuación.

______




## EL RINCÓN MATEMÁTICO

Un *criterio de congruencia* es una forma de saber si dos o más triángulos son congruentes. Por ejemplo, conocer la longitud de los tres lados que forman cada uno de los triángulos, es el criterio conocido como *LLL*, es decir, *Lado, Lado, Lado*. "Si los tres lados de dos triángulos cualquiera tienen las mismas longitudes, los triángulos son congruentes entre sí".

## PRACTICANDO LO APRENDIDO

1. Realicen las siguientes actividades en parejas.

a) Raúl mandó hacer una pieza metálica con un herrero para la cortina de su negocio y ésta debe ser de forma triangular. Determinó que uno de sus lados mide 8 cm y uno de sus ángulos mide 50°. ¿Creen que con esos datos el herrero pueda elaborar la pieza de la misma forma y tamaño que requiere la cortina de Raúl? ______ ¿Por qué? ______

En el espacio en blanco tracen la pieza que necesita Raúl para su cortina y compárenla con la que hicieron otros compañeros.

- ¿Cómo pueden saber si el herrero trazará la pieza exacta de la cortina? ______
- ¿Cuántos triángulos diferentes se pueden trazar con esta información? ______
- ¿Qué información agregarían para que la pieza que requiere Raúl sea exactamente la de la cortina? ______

b) Al ver que la pieza que el herrero elaboró no es congruente con la cortina, Raúl volvió con él y le dio dos datos más. Un lado de 8 cm, con un ángulo de 50° en uno de sus extremos y 70° en el otro extremo; y un ángulo de 50° formado por dos rectas de 8 cm y 8.8 cm cada una. ¿Cuál de estos dos datos permite elaborar la pieza congruente a la que tiene la cortina? ______

- Para justificar su respuesta, tracen en el siguiente espacio los dos triángulos resultantes de la información que dio Raúl y compárenlos con los de otros compañeros.
- Expliquen si los triángulos que trazaron son congruentes con los de otros compañeros. ______
- ¿Cuántos triángulos diferentes pueden trazarse con el primer dato proporcionado al herrero? ______
- ¿Cuántos triángulos diferentes pueden trazarse con el segundo dato? ______

Comparen sus respuestas con las de otros compañeros y reflexionen sobre las diferencias que encuentren. Con la ayuda de su profesor, escriban a continuación un criterio de congruencia para cada uno de los datos proporcionados.

______

**Libroteca**

Para complementar el tema te recomendamos leer el libro:
Roser Codina, Pascual, Carmen Burgués Flamarich, y Manuel Montanuy Fillat, *Apuntes de matemáticas*, México, Parramón Ediciones, 2007. Podrás encontrarlo en los Libros del Rincón.

## EL RINCÓN MATEMÁTICO

Existen otros dos criterios de congruencia, que son:

- *ALA. Ángulo, Lado, Ángulo.* Si un lado y los dos ángulos construidos en sus vértices tienen la misma medida, los triángulos son congruentes.
- *LAL. Lado, Ángulo, Lado.* Si los lados y el ángulo comprendido entre éstos tiene la misma medida, los triángulos son congruentes.

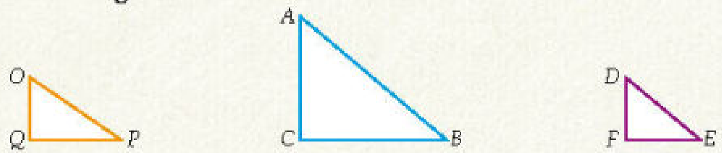




## PRACTICANDO LO APRENDIDO

1. Realicen la siguiente actividad en equipos.

a) Para adornar una caja de regalos, María y Luis decidieron trazar y recortar los triángulos de la siguiente imagen.




- Ella preguntó a Luis si los triángulos son congruentes. ¿Cuál debe ser la respuesta de Luis? ______
  ¿Por qué? ______
- Después, él preguntó a María si los tres triángulos son semejantes. Para contestar correctamente, María preguntó la longitud de sus lados. Explica por qué quiso saber la longitud de los lados de los triángulos. ______
- Escriban sobre la línea correspondiente cuál es la longitud de los lados de cada triángulo.

| | | |
|---|---|---|
| $AB=$ ______ | $BC=$ ______ | $CA=$ ______ |
| $DE=$ ______ | $EF=$ ______ | $FD=$ ______ |
| $OP=$ ______ | $PQ=$ ______ | $QO=$ ______ |

- Escriban sobre las líneas correspondientes cuál es el cociente de las siguientes **razones**.

| | | |
|---|---|---|
| $\frac{AB}{DE}=$ ______ | $\frac{BC}{EF}=$ ______ | $\frac{CA}{FD}=$ ______ |
| $\frac{AB}{OP}=$ ______ | $\frac{BC}{PQ}=$ ______ | $\frac{CA}{FD}=$ ______ |
| $\frac{OP}{DE}=$ ______ | $\frac{PQ}{EF}=$ ______ | $\frac{QO}{FD}=$ ______ |
| $\frac{DE}{AB}=$ ______ | $\frac{EF}{BC}=$ ______ | $\frac{FD}{CA}=$ ______ |

- ¿En cuáles casos los cocientes son iguales en las tres razones? ______
- En los casos que se obtuvieron cocientes diferentes, los triángulos empleados no son semejantes. ¿Cuáles triángulos son congruentes? ______

Comparen sus respuestas con las de otros equipos y reflexionen sobre las diferencias que encuentren. Con la ayuda de su profesor, escriban dentro de las líneas una regla que permita determinar si dos triángulos son congruentes. ______

**Glosario**

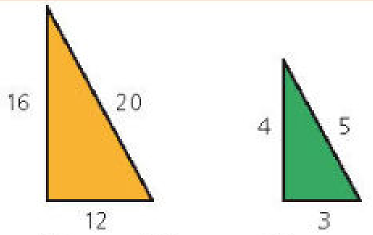
**Razón.** Se llama razón o relación de dos cantidades al cociente de la primera entre la segunda.

**TIC**

Para reforzar lo visto en esta lección, visita la siguiente página electrónica y realiza algunos de los ejercicios que ahí se muestran. Disponible en: http://www.vitutor.com/geo/eso/ss_3.html
(Consulta: 4 de diciembre de 2016.)
Comenten en equipo su experiencia con la actividad y propongan en el salón ejercicios similares a los que realizaron.

## EL RINCÓN MATEMÁTICO

Dos triángulos son semejantes, es decir, $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, si el cociente de las razones entre sus lados homólogos es el mismo. A este cociente se le conoce con el nombre de constante de proporción.



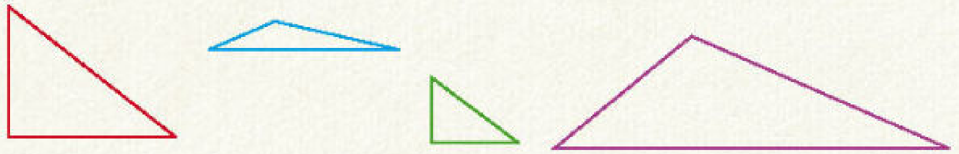

$\frac{16}{4} = 4 \quad \frac{20}{5} = 4 \quad \frac{12}{3} = 4$

$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

## APLICANDO LO APRENDIDO

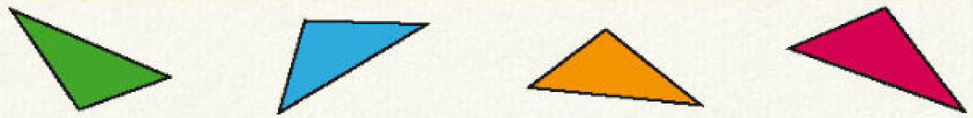
1. Junto con otro compañero, analicen y resuelvan las siguientes situaciones.

a) Andrés tiene una repostería y mandó hacer varios moldes de forma triangular para hornear sus galletas. Son los que se muestran en la siguiente imagen.



- ¿Cuáles moldes son semejantes? ____________________

b) Rubén quiere formar un vitral con las siguientes piezas de vidrio. Sólo quiere usar las que sean congruentes entre sí. ¿Cuál de todas no debe formar parte del vitral? ____________________



- Justifiquen su respuesta con alguno de los criterios de congruencia y escríbanlo dentro del recuadro siguiente.

Comparen sus respuestas con las de otros compañeros y con la ayuda de su profesor reflexionen y argumenten sobre las diferencias que encuentren.





**Eje: Manejo de la información**

**Tema: Proporcionalidad y funciones**

## Contenido 4

Análisis de **representaciones** (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una **relación de proporcionalidad**.

## LO QUE SÉ

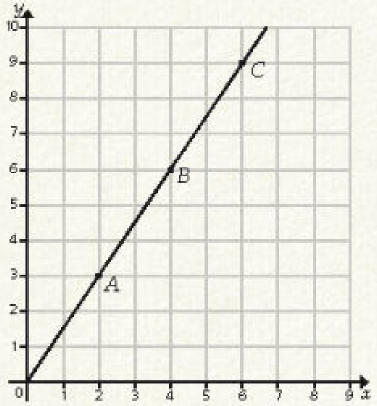
1. Analiza y resuelve la siguiente situación, con la ayuda de un compañero.

a) Adriana y Andrés caminan juntos todos los días. Él recorre 150 metros y ella 100 metros por cada minuto de caminata. ¿Cuál es la distancia que recorre cada uno después de 3, 6, 8, 9 y 10 minutos? Completa la tabla.

| Tiempo (minutos) | Distancia recorrida (metros) | |
|---|---|---|
| | Adriana | Andrés |
| 3 | | |
| 6 | | |
| 8 | | |
| 9 | | |
| 10 | | |

- ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el recorrido de Adriana?
- ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el recorrido de Andrés?
- Un día, Andrés dio una ventaja de 1 minuto a Adriana. ¿A qué distancia de ella estará después de 2 minutos de comenzar él su recorrido?
- ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la ventaja que dio Andrés a Adriana? _

2. Analicen la siguiente gráfica y completen la tabla con la información de los puntos $O$, $A$, $B$ y $C$.




| $x$ | $y$ |
|---|---|
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |

- ¿Cuál es la ordenada al origen? ______
- ¿Qué expresión algebraica representa la ordenada al origen? ______

3. Comparen sus respuestas con las de otros compañeros y reflexionen sobre las diferencias que encuentren. Por último, contesten las siguientes preguntas.
   - ¿A qué se le llama ordenada al origen? ______
   - ¿A qué se le llama proporción directa? ______

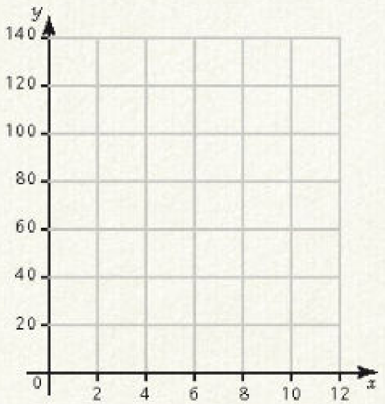
Comparen sus respuestas con las de otros compañeros y junto con su profesor, concluyan sobre qué se entiende por una proporción.

## PRACTICANDO LO APRENDIDO

En parejas, analicen y resuelvan las siguientes situaciones.

1. En la Ciudad de México el litro de gasolina Magna es de aproximadamente $10. El despachador sólo tiene que cobrar la cantidad de gasolina que vende y los consumidores dan una propina de acuerdo con su criterio. Independientemente de los litros que compre, Javier siempre da $5 de propina, Ana también da $5 cuando compra más de 8 litros de gasolina, de lo contrario sólo da $3 y Rubén no da nada. Si ellos consumen 3, 7, 10 y 12 litros, de acuerdo con lo anterior, ¿cuánto pagarán respectivamente en total cada uno de ellos? ¿Cuánto gastarán ellos en cada una de las situaciones que se plantearon? Completa la tabla y grafica los valores.

   a) ¿Qué diferencias encuentran entre las tres rectas? ______



| $x$ | $y$ | | |
|---|---|---|---|
| | Javier | Ana | Rubén |
| 3 | | | |
| 7 | | | |
| 10 | | | |
| 12 | | | |





b) Al prolongar las tres rectas hasta intersecarse con el eje de las ordenadas, ¿qué valor le corresponde a $x$ en cada caso? Escriban sus respuestas sobre las líneas.

Javier: ______ Ana: ______ Rubén: ______

c) Escriban sobre la línea cuál es la expresión algebraica que representa cada una de las rectas de la gráfica.

Javier: ______ Ana: ______ Rubén: ______

d) ¿Cuál de las expresiones algebraicas anteriores es de la forma $y = mx + b$?

______

e) ¿Cuál de las expresiones algebraicas anteriores es de la forma $y = kx$?

______

f) ¿Qué diferencias encuentran entre estas dos expresiones y sus rectas en el plano cartesiano?

______

Comparen sus respuestas con las de otros compañeros, justifiquen las diferencias que encuentren y reflexionen sobre el caso en el que $x = 0$ y el tipo de recta que resulta al graficarla en el plano. Escriban sus conclusiones en las siguientes líneas.

______

2. En la panadería "La trufa" las bolsas se venden a $1 y cada telera a $2 y los clientes prefieren comprar bolsa que llevar una. ¿Cuánto pagará un cliente que compre 4, 7, 8 o 10 teleras? Escriban sus respuestas en la tabla y grafiquen los valores.

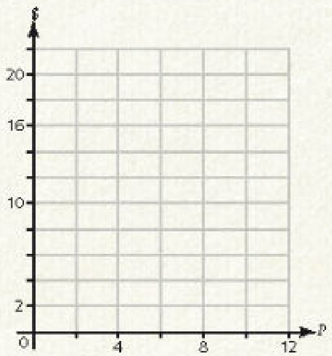
   a) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa esta situación? ______

   b) ¿Qué forma tiene la expresión que modela esta situación, $y = mx + b$ o $y = kx$? ______
      - ¿Por qué? ______

   c) ¿Qué valor toma $y$ cuando $x = 0$? ______

   d) ¿Qué tipo de línea se dibuja al graficar los valores de la tabla? ______

Comparen sus respuestas con las de otras parejas y reflexionen sobre las diferencias que encuentren.



| $p$ | $ |
|---|---|
| 4 | |
| 7 | |
| 8 | |
| 10 | |

### Saber más...

El desperdicio de cartón y papel constituye más del 80% de la materia prima con que se fabrica el papel. La celulosa de madera y otros materiales similares constituyen un 14% de los insumos, y menos del 4% se obtiene del bagazo de caña, según datos de la Cámara de Papel de México. En México, la producción de papel supera las 200 toneladas diarias y se reparte en tres plantas principales alrededor del país, ubicadas en Jalisco, Michoacán y Oaxaca y su contribución al Producto Interno Bruto (PIB) nacional es del 0.3%, según Grupo Coparmex y Financiera Rural.

FUENTE: "En riesgo la industria del papel por falta de reciclaje", *Alto nivel*, recuperado de: http://www.altonivel.com.mx/34383-bio-pappel-y-el-exito-del-papel-reciclado/ (Consulta: 4 de diciembre de 2016.)

En las situaciones planteadas en los incisos a y b abordamos el tema de la relación proporcional. Con la ayuda de su profesor comenten las características que tiene una relación proporcional, qué tipo de recta resulta al graficarlas, la forma de la expresión algebraica que la modela y cuál es el valor de $y$ cuando $x = 0$. Escriban sus conclusiones en las siguientes líneas.

TIC

Analiza uno de los temas del Informe de la Evaluación de la Política de Desarrollo Social en México 2012, de la siguiente página electrónica. Se encuentra disponible en: http://www.coneval.org.mx/Informes/Evaluacion/IEPDS2012/Pages-IEPDSMex2012-12nov-VFinal_lowres6.pdf#search=Pages%2DIEPDSMex2012%2D12nov%2DVFinal%5Flowres6%2Epdf (Consulta: 4 de diciembre de 2016.)
Comenta con tus compañeros la estrategia que utilizaste para interpretar la lectura de las gráficas.

## PRACTICANDO LO APRENDIDO

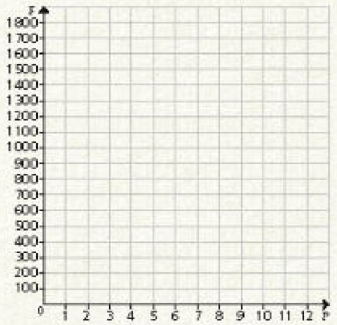
En equipos de dos integrantes analicen y resuelvan las siguientes situaciones.

1. En el laboratorio de física se realizó una práctica sobre presión. El profesor explicó que el pascal es la unidad para medir la presión y resulta de dividir la fuerza aplicada entre el área de aplicación, es decir, $P = \frac{F}{A}$. Los alumnos organizaron tres equipos de la siguiente manera:

   a) Equipo 1. Este equipo quiere saber la fuerza en newtons (N) que se aplicó a un trozo de madera que tiene 150 cm² de área si la presión a la que se sometió fue de 3, 6 y 10 pascales. Expliquen por qué $F = PA$ es la expresión con la que podemos resolver esta situación.

   A continuación completen la tabla y grafiquen los valores.

   - Expliquen si la fuerza es proporcional a la presión que se aplica a la madera.
   - Expliquen si la expresión $F = PA$ tiene la forma $y = mx + b$ o la forma $y = kx$.
   - ¿Qué valor toma $y$ cuando $x = 0$?
   - ¿Qué tipo de línea representa esta situación?




| P | F |
|---|---|
| 3 | |
| 6 | |
| 10 | |

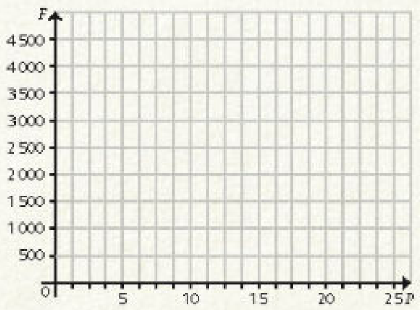
   b) Equipo 2. Este equipo quiere saber la magnitud de la fuerza que se ejerce sobre un trozo de madera con forma cuadrada de 5 cm, 10 cm y 20 cm por lado, respectivamente. En los tres casos la presión es de 10 pascales.





A continuación completen la tabla y grafiquen los valores.

- Expliquen si la fuerza es proporcional al área de la madera.
- ¿Cómo obtuvieron $A$?
- Expliquen por qué la expresión $F = PA$ puede sustituirse por $F = L^2 P$.
- ¿Qué valor toma $y$ cuando $x = 0$?
- ¿Qué tipo de línea resulta al graficar esta situación?

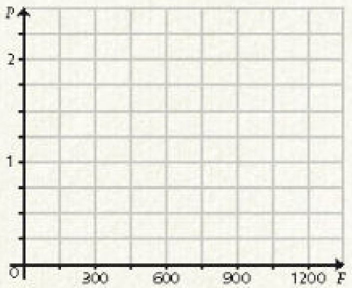



| P | F |
|---|---|
| 5 | |
| 10 | |
| 15 | |

   c) En el equipo 3 quieren saber cuál es la presión que se produce al aplicar una fuerza de 150 $N$, 300 $N$, 600 $N$ y 1 200 $N$ sobre un trozo de madera de 600 cm².

   A continuación completen la tabla y grafiquen los valores.

   - Expliquen si la presión es proporcional a la fuerza que se aplica a la madera.
   - ¿Qué valor toma $y$ cuando $x = 0$?
   - ¿Qué tipo de línea resulta al graficar esta situación?
   - ¿Qué forma tiene la expresión $P = \frac{F}{A}$, $y = mx + b$ o $y = kx$?




| F | P |
|---|---|
| 150 | |
| 300 | |
| 600 | |
| 1200 | |

2. Comparen sus respuestas con las de otros equipos y reflexionen sobre qué tipo de recta resulta al graficar una expresión del tipo $y = kx$, además, cuál es el valor de $y$ cuando $x = 0$.

   a) Recordando el problema de Rubén, analizado en la sección anterior, y el de $F = PA$, se observa que en ambos casos existe una proporcionalidad directa entre sus variables. A continuación, contesten las siguientes preguntas.

   - ¿Qué tipo de expresión es la proporción directa?

TIC

Para reforzar lo visto en esta lección, visita la siguiente página electrónica y realiza algunos de los ejercicios que ahí se muestran. Disponible en: http://bibliotecadigital.ilce.edu.mx/sites/telesecundaria/tsa01g01v02/u03t05s01.html
(Consulta: 4 de diciembre de 2016.)
Explica al grupo y a tu profesor lo que representa la gráfica que elaboraste.

- ¿Cómo es la recta que representa este tipo de proporciones? ______

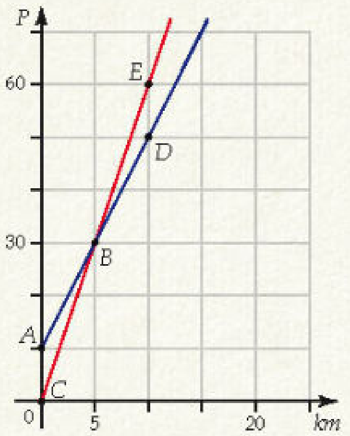
- ¿Qué valor toma $y$ cuando $x = 0$? ______

Comparen sus respuestas con las de otras parejas, reflexionen sobre las diferencias que hayan encontrado y con la orientación de su profesor, concluyan sobre las características que tiene una proporción directa. Anoten sus conclusiones en el siguiente recuadro.

## Aplicando lo aprendido

De manera individual, analiza y resuelve las siguientes situaciones.

1. La siguiente gráfica muestra el costo de contratar los servicios de taxi en dos sitios diferentes. La recta roja corresponde a los taxis Pacífico y la recta azul a los Dorados. Analiza la gráfica y completa las tablas con los datos de cada punto marcado en ella.




| Pacífico | |
|---|---|
| km | P |
| | |
| | |
| | |
| | |

| Dorados | |
|---|---|
| km | P |
| | |
| | |
| | |
| | |

a) ¿En cuál de los sitios de taxis la relación kilómetros-precio es una proporción directa? ______
¿Por qué? ______

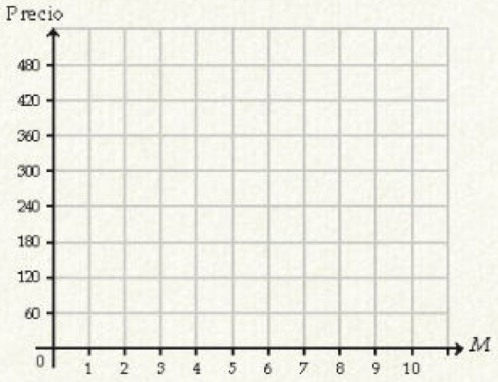
b) ¿Cómo puedes saber si una recta es la representación de una proporcionalidad directa? ______

c) Si analizas los valores de una tabla que represente una proporcionalidad directa, ¿cómo puedes diferenciarla de una que contenga una relación proporcional? ______





2. Se solicitó una cotización a tres casas distribuidoras de materiales sobre el precio del metro cuadrado de tabique. La dueña de la construcción elaboró las siguientes tablas con la información que le proporcionaron, donde $M$ es la cantidad de metros cotizados y $A_1$, $A_2$ y $A_3$ son los precios que cotizaron cada una de las tres casas distribuidoras consultadas. Grafica los valores de cada tabla distinguiendo las rectas con algún color y después contesta las preguntas.




| $M$ | Precio cotizado por cada distribuidora | | |
|---|---|---|---|
| | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ |
| 3 | 180 | 180 | 180 |
| 5 | 300 | 280 | 250 |
| 8 | 480 | 430 | 360 |

a) ¿Cuál de las cotizaciones es una relación proporcional? ______

- ¿Por qué? ______

b) ¿Cuál de las cotizaciones se puede representar con una expresión algebraica de la forma $y = kx$? ______

Compara tus respuestas con las de tus compañeros y argumenta sobre qué es lo que produce las diferencias que encontraron.

Con la ayuda de su profesor, reflexionen sobre cómo pueden saber si existe una relación proporcional o una proporcionalidad directa, sin graficar los valores en una tabla. Escriban sus conclusiones dentro del recuadro.

## El rincón matemático

Las expresiones algebraicas de la forma $y = mx + b$ representan una relación lineal donde:

- $b$ es la ordenada al origen, es decir, es el punto donde la recta se interseca con el eje $y$. Siempre es diferente de cero.
- Su gráfica es una línea recta.
- Si $x = 0$ entonces $y = b$.

En una proporción directa:

- La expresión algebraica es de la forma $y = kx$.
- La gráfica es una línea recta que pasa por el origen.
- Si $x = 0$, entonces, $y = 0$.

## Eje: Manejo de la información

### Tema: Proporcionalidad y funciones

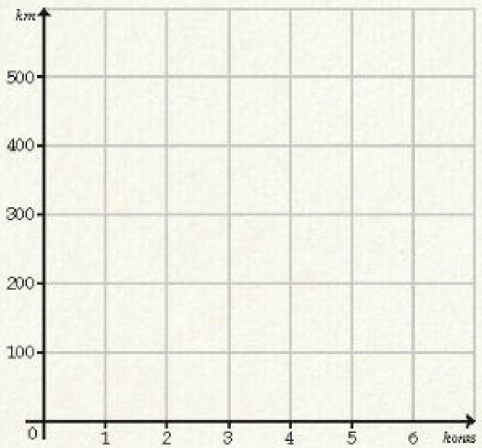
## Contenido 5

Representación tabular y algebraica de **relaciones de variación cuadrática**, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la Física, la Biología, la Economía y otras disciplinas.

### Lo que sé

1. Forma equipo con un compañero para que analicen y resuelvan las siguientes situaciones.

a) Dos automóviles salen de lugares distintos a la misma hora hacia el mismo destino. El primer auto se desplaza a una velocidad constante de 80 km por hora, mientras que el segundo se desplaza a una velocidad constante de 50 km por hora y lleva una ventaja de 80 km sobre el primero. ¿Cuál es la distancia que han recorrido después de 2, 3, 5 y 6 horas de viaje? Completen la tabla y grafiquen los valores.



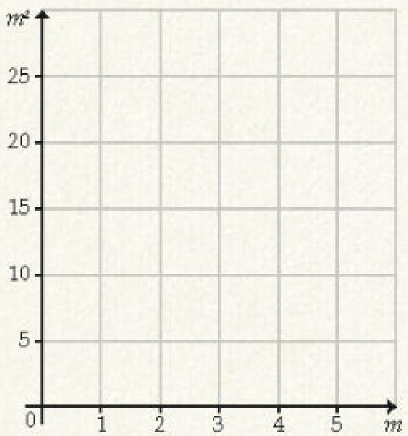

| *T* | Distancia recorrida por cada auto | |
|---|---|---|
| | 1 | 2 |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 5 | | |
| 6 | | |

- ¿Cuál de las rectas que representan el recorrido de los dos autos representa una relación proporcional? ____________

  ¿Por qué? ____________
- ¿Cómo se puede saber si una relación lineal es proporcional o directa? ____________

b) Ricardo desea vender cuatro locales comerciales en una gran plaza, tienen forma de cuadrado, por lo que necesita determinar el área de cada uno de ellos. Las medidas de sus lados son 2, 3, 4 y 5 metros, respectivamente. Además de elaborar la tabla correspondiente, quiere graficar los valores y ponerlos a la vista de los clientes. Completen la tabla que elaboró Alberto y tracen la gráfica.






| Medida por lado (m) | Área (m²) |
|---|---|
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |

- ¿Cómo es la línea que representa esta situación? ____________
- ¿Cuál es la expresión algebraica que representa esta situación? ____________
- Explica si representa una proporcionalidad directa. ____________
- Explica si representa una relación lineal. ____________

Comparen sus respuestas con las de otros compañeros y reflexionen sobre las diferencias encontradas. Ahora contesten las siguientes preguntas.

- ¿Qué diferencias encuentran entre las expresiones algebraicas de la primera actividad y la segunda? ____________
- ¿Cómo pueden distinguir gráficamente una relación lineal de una cuadrática? ____________

### Saber más...

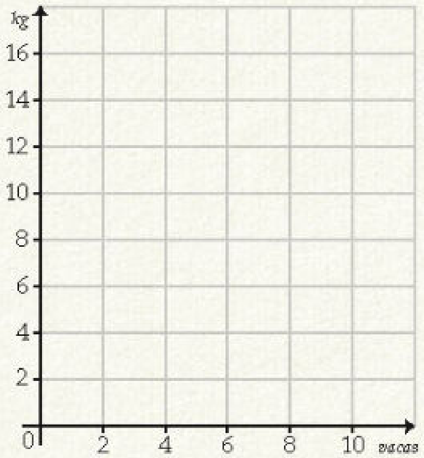
¿Sabías que Usain Bolt es un atleta jamaicano especialista en pruebas de velocidad? Sin duda, es una de las estrellas que más brilló en los Juegos Olímpicos de Pekín, en 2008. Su extraordinaria velocidad y la aparente facilidad con que consiguió tres medallas de oro y rompió tres récords mundiales impresionaron al mundo entero y lo consagraron como el velocista más completo de la historia. Un año después, en el campeonato mundial de atletismo, efectuado en Berlín, batió sus propias marcas en los 100 y 200 metros planos, con tiempos de 9.58 y 19.19 segundos, respectivamente. Tras su actuación en los Juegos Olímpicos de Londres en 2012, en los que repitió la hazaña de Pekín al obtener la medalla de oro en los 100 y 200 metros planos y en los relevos 4 × 100, fue calificado por los medios como una leyenda viva en la historia del deporte.

FUENTE: "Usain Bolt", *Biografías y vidas*, recuperado de: http://www.biografiasyvidas.com/biografia/b/bolt.htm (Consulta: 4 de diciembre de 2016.)

## PRACTICANDO LO APRENDIDO

1. En parejas, analicen y resuelvan las siguientes situaciones.

a) Para alimentar diariamente a una vaca se necesitan tres kilogramos más que la cantidad de vacas que es necesario alimentar. ¿Qué cantidad de alimento se necesita para alimentar a 3, 5, 6 y 8 vacas, respectivamente? Completa la tabla y grafica los valores de ésta.




| Número de vacas | Cantidad de alimento (kg) |
|---|---|
| 3 | |
| 5 | |
| 6 | |
| 8 | |

**TIC**

Para reforzar lo visto en esta lección, visita la siguiente página electrónica y realiza algunos de los ejercicios que ahí se muestran. Disponible en: https://www.matesfacil.com/ESO/proporcionalidad/ejercicios-resueltos-proporcionalidad-directa-inversa.html (Consulta: 4 de diciembre de 2016.)

Formen equipos de trabajo y comenten las actividades que realizaron y comenten de qué otra forma las matemáticas se pueden relacionar con otras ciencias.

- ¿Cuál es la expresión algebraica que representa esta situación? ______
- ¿Cuál es el grado algebraico de esta expresión? ______
- ¿Qué tipo de recta se traza al graficar los valores de la tabla? ______
- ¿Qué tipo de relación existe entre la cantidad de vacas y la cantidad de alimento? ______

b) Para hacer llegar alimentos a una comunidad en la sierra, se dejan caer cajas contenedoras con comida desde un helicóptero. Se sabe que para calcular la distancia se emplea la fórmula de caída libre.

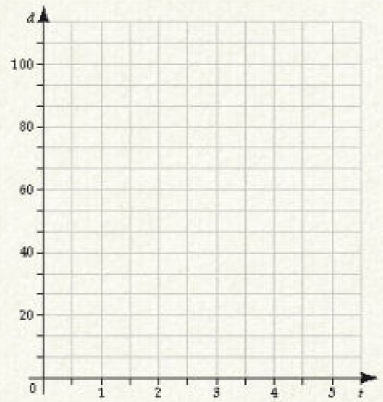
$$d = \left(\frac{gt^2}{2}\right)$$

La $d$ corresponde a la distancia que recorre un objeto al caer, $g$ es la constante de aceleración gravitacional cuyo valor es 9.81 m/s$^2$ y $t$ es el tiempo que tarda en caer el objeto.

- Expliquen de qué manera puede simplificarse la fórmula anterior a la expresión $d = 4.905\,t^2$. ______
- ¿Qué distancia recorre una caja con alimentos si tarda 6 segundos en caer? ______
- ¿Cuál es la distancia que recorre la caja después de 1, 2, 3 y 4 segundos? Completen la tabla y grafiquen los valores.








| t | d |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |

- ¿Qué tienen en común la gráfica de esta actividad y la gráfica de la actividad anterior? ______
- ¿Qué tipo de relación existe entre la distancia y el tiempo? ______
- ¿Qué tipo de recta resulta después de graficar los valores de la tabla? ______

Comparen sus respuestas con las de otros compañeros y analicen el tipo de línea que resulta al graficar una expresión cuadrática. Escriban sus conclusiones en el recuadro siguiente.

c) Andrés está haciendo pruebas para determinar la fuerza resultante al aplicar una presión de 2 pascales sobre varias tablas de forma cuadrada.

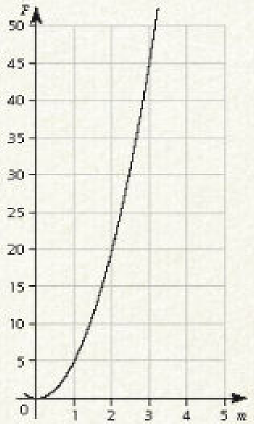
Recordemos la fórmula:

$$F = AP$$

donde $A$ representa el área, $P$ la presión y $F$ la fuerza.

Observen la gráfica y calculen la fuerza que resultará si cada tabla tiene 1, 2, 3 y 4 metros por lado. Completen la tabla.

| Lado (m) | F |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |

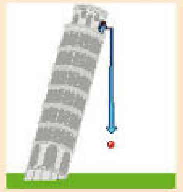


- ¿Qué tipo de relación existe entre la fuerza y la longitud de los lados de la tabla? ______
- Expliquen por qué $F = 5\ell^2$ (5 litros cuadrados) es una de las expresiones que representan esta situación. ______
- ¿La expresión anterior es cuadrática? ______ ¿Por qué? ______
- ¿Qué tipo de línea resulta al graficar esta expresión algebraica? ______
- Comparen sus respuestas con las de otros compañeros y escriban sobre las líneas cómo se puede reconocer gráficamente si una relación es o no cuadrática. ______

Con ayuda de su profesor reflexionen sobre cómo determinar si dos magnitudes guardan una relación cuadrática, escriban sus conclusiones dentro del siguiente recuadro.

### Matemáticas con otras ciencias

Para enriquecer el tema de la caída libre puedes consultar tu libro de Ciencias 2, con énfasis en Física, en el bloque 1, donde encontrarás las explicaciones de Aristóteles y Galileo acerca de la caída libre. Obtén tus propios registros, así como lo hizo Galileo cuando dejó caer diferentes objetos desde la torre inclinada de Pisa.



## Aplicando lo aprendido

1. Analicen y resuelvan los siguientes problemas.

   a) Andrés y Ana son dos artesanos que tejen manteles. Cobran $100 pesos por cada metro cuadrado que tejen; ella ofrece sus manteles de 2 m de ancho por el largo que el cliente pida; él fabrica sus manteles de forma cuadrada de la longitud que quiera el cliente. Ana tiene un pedido de manteles de 2, 3 y 4 metros de largo cada uno y Andrés también tiene un pedido de 2, 3 y 4 metros por lado cada uno.

   - ¿En cuál de las dos formas de trabajo existe una relación cuadrática, en la de Ana o en la de Andrés? ______
   - ¿Cómo justifican que la relación es cuadrática? ______

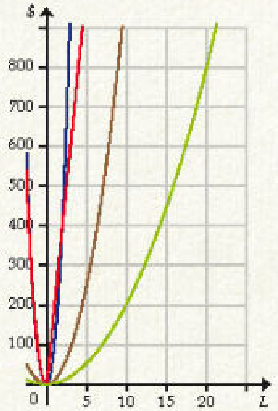




- ¿Cuál es la expresión algebraica que modela cada una de estas dos relaciones? ______
- Observen las tablas siguientes y contesten cuál de las dos corresponde a la relación de los manteles de Ana. ______

| $L$ | Precio |
|---|---|
| 2 | 400 |
| 3 | 600 |
| 4 | 800 |

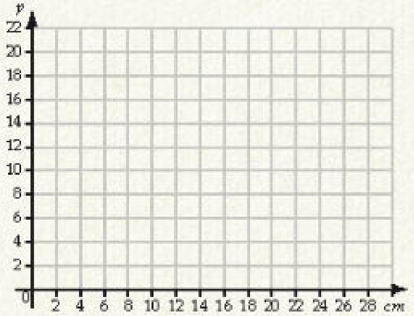
| $L$ | Precio |
|---|---|
| 2 | 400 |
| 3 | 900 |
| 4 | 1 600 |




- ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a la relación cuadrática de los manteles? Indiquen el color de la línea. ______ ¿Por qué? ______

b) Analicen cada una de las siguientes situaciones, contesten las preguntas y grafiquen aquella que represente una relación cuadrática.

- Ernesto es un herrero y sólo construye ventanas rectangulares cuyo largo siempre mide 0.5 m más que el ancho. En esta ocasión construyó ventanas de 2 m, 3 m, 4 m y 5 m de ancho cada una. ¿Cuál es el área de cada una de ellas?
- ¿Cuál es la fuerza que se aplica para generar una presión de 0.5 pascales a un área de 5 cm², 10 cm², 20 cm² y 30 cm²? ______




Comparen sus respuestas con las de otros compañeros y comenten en cuál de las dos situaciones se encuentra una relación cuadrática. Escriban sus conclusiones en las líneas siguientes.

______

### El rincón matemático

Dos magnitudes se relacionan de manera cuadrática si la expresión algebraica que las representa es de segundo grado; puede ser de la forma $y = ax^2 + bx + c$, $y = ax^2 + bx$, $y = ax^2 + c$ o $y = ax^2$.

Al graficarlas en el plano cartesiano, sus valores dibujan una parábola.

## Eje: Manejo de la información

### Tema: Nociones de probabilidad

## Contenido 6

Conocimiento de la **escala de la probabilidad**. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes.

### Lo que sé

1. Analiza y resuelve los siguientes problemas.

   a) Andrea, Ramiro y Juan, juegan "Serpientes y escaleras", sólo que ellos han puesto sus propias reglas. Ramiro avanzará diez casillas si al lanzar el dado cae un número par, Andrea avanzará diez casillas si el dado cae en número impar, mientras que Juan avanzará las mismas casillas que ellos si en el dado sale un múltiplo de 3.

   - ¿Quién de ellos tiene mayor posibilidad de avanzar al lanzar el dado? ____________
   - ¿Cuál es la probabilidad de que caiga un número par? ____________
   - ¿Cuál es la probabilidad de que caiga un múltiplo de 3? ____________

   b) Raúl y María tienen dos dados y una moneda. Lanzan los dados y la moneda al mismo tiempo. Él afirma que son 72 las posibilidades en este experimento, mientras que ella afirma que sólo son 38. ¿Quién de ellos tiene razón? ____________

   ¿Por qué? ____________

2. Héctor quiere determinar cuáles son algunos eventos posibles del experimento de lanzar un dado al aire. Escribe sobre las líneas señaladas al menos cuatro eventos de este experimento.

   Evento *A*: ____________

   Evento *B*: ____________

   Evento *C*: ____________

   Evento *D*: ____________

Comparen sus eventos y justifíquenlos, además, reflexionen si los eventos planteados pueden resultar. Con la ayuda de su profesor elaboren una lista de todos los eventos posibles.





3. Contesta las siguientes preguntas.

   a) ¿A qué se le llama evento? ____________

   b) ¿Qué es un experimento aleatorio? ____________

   c) ¿Cómo se determina el espacio muestral en un experimento? ____________

   d) ¿Cómo se determina la probabilidad de un evento? ____________

Comparen sus respuestas con las de otros compañeros y reflexionen sobre las diferencias que encuentren. Con la ayuda de su profesor determinen la definición correcta para cada uno de los conceptos de la actividad 2 de esta lección.

### Practicando lo aprendido

1. En equipos de seis integrantes, jueguen carreras de caballos en el siguiente tablero, para ello, cada uno debe escoger dos números del tablero. Lancen dos dados, sumen los puntos y avanzará una casilla quien haya elegido ese número.

| Tirada | Caballo | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 1 | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | | | | | | |
| Meta | | | | | | | | | | | | |

**Libroteca**

Para complementar el tema te recomendamos leer el libro:

Noreña Villarías, Francisco y Juan Tonda Mazón, *Medición y sus unidades*, México, Santillana, 2002.

Puedes encontrarlo en los Libros del Rincón.

   a) ¿Qué caballo es imposible que gane? ____________
   - ¿Por qué? ____________

   b) ¿Qué caballo es seguro que gane? ____________
   - ¿Por qué? ____________

2. Ahora ubiquen en la siguiente recta la posibilidad que cada uno tiene de ganar, de acuerdo con el número de caballo que cada compañero tiene.


   a) De acuerdo con la recta anterior, que se conoce como la escala de la probabilidad, ¿qué valor le corresponde a igual posibilidad? ____________

Si se tuviera que agregar a la escala de la probabilidad una etiqueta para los valores 0.25 y 0.75, ¿cuáles serían las etiquetas más representativas? ______

3. En la siguiente escala, empleen cantidades entre 0 % y 100 % para graduarla.

imposible | igual posibilidad | seguro

a) ¿Qué porcentaje le corresponde a la etiqueta "seguro"? ______

4. En la siguiente escala, empleen fracciones entre 0 y 1 para graduarla.

imposible | igual posibilidad | seguro

a) ¿Qué fracción le corresponde a la etiqueta de "imposible"? ______

Comparen sus respuestas y sus escalas con las de otros equipos y reflexionen sobre las diferencias que encuentren. Con la ayuda de su profesor, concluyan acerca de las etiquetas y los valores que debe tener la escala de probabilidad y anótenlas en el siguiente recuadro.

5. Analicen y resuelvan las siguientes situaciones.

a) Para formar la sociedad de alumnos se escogieron los mejores promedios de cada grupo. De los grupos de primer grado se eligieron 14 alumnos, de segundo, seis y de tercero, diez alumnos. Se escogió un presidente, un secretario y tres vocales. De acuerdo a la escala de la probabilidad, contesten las siguientes preguntas.

- ¿De qué grado hay casi las mismas posibilidades de elegir al presidente? ______
- ¿De qué grado es casi imposible que se elija al presidente? ______

b) Para la rifa de una pantalla de 52 pulgadas entre los locatarios de un mercado, se pusieron a la venta 500 boletos. La familia de María compró una cuarta parte de los boletos, Adriana compró 3 y entre todos los demás compraron el 70% de los boletos. ¿En cuál de los tres grupos es casi seguro que se ganen la pantalla? ______

Compara y justifica tus resultados con los de otros compañeros, reflexionen sobre las diferencias que encuentren. Por último, con la ayuda de su profesor, concluyan sobre la importancia que tiene conocer la escala de la probabilidad.





## Practicando lo aprendido

1. Analicen en equipo los siguientes problemas y resuélvanlos.

a) En una tómbola se metieron 20 esferas numeradas del 1 al 20, de entre las cuales saldría el ganador de un reloj de mano. Se pidió a tres niños que propusieran un evento con el que obtendrían al ganador del premio. Las propuestas fueron las siguientes:

Raúl: "Que se extraiga una esfera con un múltiplo de 5".

Ana: "Que salga una esfera con un número impar".

Lizbeth: "Que caiga un múltiplo de 3".

Al extraer la esfera, salió la marcada con el número 15. ¿A quién de ellos se le tiene que dar el premio? ______

Los tres piden una explicación porque se les hace injusto que el premio sea para los tres. Quien organizó el juego les explicó que los eventos propuestos no son eventos mutuamente excluyentes.

- ¿Cuáles son los casos favorables para el evento de Raúl? ______
- ¿Cuáles son los casos favorables para el evento de Ana? ______
- ¿Cuáles son los casos favorables para el evento de Lizbeth? ______
- ¿Con qué otros resultados ganarían los tres al mismo tiempo? ______
- ¿Con qué otros resultados ganarían al menos dos de ellos al mismo tiempo? ______

Comparen sus respuestas y reflexionen sobre las diferencias que encuentren. Con la orientación de su profesor, concluyan sobre las características que tienen dos eventos que no son mutuamente excluyentes y escríbanlas en las siguientes líneas.

______

- ¿Qué eventos proponen para asegurar que habrá un solo ganador? Escríbanlos sobre la línea correspondiente.

Raúl: ______

Ana: ______

Lizbeth: ______

Comparen sus eventos con los de otros equipos y comprueben que efectivamente haya un solo ganador.

Si los eventos que plantearon aseguran que efectivamente sólo hay un ganador, entonces pueden decir que esos eventos son mutuamente excluyentes. Con la orientación de su profesor concluyan sobre cuándo dos o más eventos son mutuamente excluyentes y determinen las condiciones para este tipo de eventos. Anoten sus conclusiones en el siguiente recuadro.

b) Martín quiere rifar entre sus dos sobrinos un juguete; para ello lanzará un dado y quien haya escogido el número que caiga ganará el premio. Él indicó que escogieran un evento, de modo que se asegurará que uno de los dos gane. Los eventos que propusieron sus sobrinos son:

Claudio: "Que caiga un número par".

Diego: "Que caiga un número impar".

- ¿Creen que al lanzar el dado seguramente uno de los dos gane? ____
  ¿Por qué? ____
- ¿Cuál es el espacio muestral de lanzar un dado al aire? ____
- ¿Cuáles son los casos favorables para cada evento? Escríbanlos sobre las líneas.
  Claudio: ____
  Diego: ____
- ¿Qué diferencia encuentran entre los eventos propuestos por los sobrinos de Martín y el espacio muestral de este experimento? ____
- A los eventos que plantearon los sobrinos de Martín se les conoce como eventos complementarios. ¿Qué características tienen estos eventos? ____

Comparen sus respuestas con las de otros compañeros y reflexionen sobre las diferencias que encuentren. Posteriormente, con la ayuda su profesor concluyan cuáles son los eventos complementarios y sus características. Escriban sus respuestas en el cuaderno.

- Con base en sus conclusiones, analicen los siguientes eventos que corresponden al experimento de extraer de una urna una esfera de las 15 que hay y que están numeradas del 1 al 15. Escriban sobre la línea su evento complementario.
  Evento $A$: "Extraer una esfera que sea mayor a 10".
  Evento complemento de $A$: ____





Evento $B$: "Extraer un número múltiplo de 2".

Evento complemento de $B$: ____

Comparen sus respuestas y reflexionen sobre las diferencias que encuentren y justifiquen que verdaderamente los eventos propuestos son complementarios.

c) Julia y Adrián se disputan un boleto para ir a un concierto jugando volados. Ella propuso que el que gane tres de cinco volados se lleva el boleto. Julia escogió sol.

- ¿Cuál es espacio muestral de este experimento? ____
- ¿Cuál es la probabilidad que tiene Julia de ganar el primer volado? ____
- ¿Cuál es la probabilidad de que gane Julia el segundo volado? ____
- ¿Cuál es la probabilidad para Julia de ganar el tercer volado? ____
- ¿Por qué no cambia la probabilidad en cada volado? ____

Comparen sus respuestas con las de otros equipos y reflexionen sobre las diferencias que encuentren. A estos eventos se les conoce como eventos independientes. ¿Cuáles son las características que tienen estos eventos? ____

d) En el municipio de Naucalpan se llevó a cabo el sorteo para determinar quiénes realizarán el servicio militar. Para ello, llenaron una tómbola con 500 esferas de color negro y 500 blancas; quien saque una esfera negra debe marchar. Julio, Alberto, Óscar, Isaac y Marco, fueron al sorteo. El sorteo es sin reemplazo, es decir, no se regresan las esferas a la tómbola; contesten las siguientes preguntas.

- ¿Cuál es el espacio muestral de este experimento? ____
- ¿Cuál es la probabilidad de que Julio realice el servicio militar? ____
- Si a Julio le tocó marchar y Alberto es el siguiente en el sorteo, ¿cuál es la probabilidad de que Alberto realice el servicio militar? ____
- ¿Óscar tiene la misma probabilidad que tuvieron Julio y Alberto de realizar el servicio militar? ____ ¿Por qué? ____

  ¿Qué sucede con la probabilidad que tiene cada uno de ellos de hacer su servicio militar? ____

Estos eventos se conocen como eventos no independientes. ¿Por qué creen que se llaman así? ____ ¿Cuáles son las características que tienen? ____

Comparen sus respuestas de los incisos c y d, y con la asesoría de su profesor, concluyan sobre los eventos independientes y sus características. Escríbanlas dentro del siguiente recuadro.

TIC

Te invitamos a visitar la página: http://www.ck12.org/book/CK-12-Conceptos-de-Matem%C3%A1ticas-de-la-Escuela-Secundaria-Grado-8-en-Espa%C3%B1ol/section/11.10/ en la que podrás analizar las características de eventos mutuamente excluyentes. Posteriormente, comenta con tus compañeros tu experiencia al resolver los problemas que ahí se presentan.

(Consulta: 4 de diciembre de 2016.)

## APLICANDO LO APRENDIDO

Analicen y resuelvan cada una de las siguientes situaciones.

1. En la feria del pueblo se instaló un puesto donde se juega a lanzar dos dados; se suman los puntos obtenidos y gana quien haya escogido ese número. Cada jugador tiene la opción de decir el evento con el que quiere ganar. Los eventos de Paola, Diana y Citlali son, respectivamente:

   Evento *A*: Que la suma sea un número par mayor a 7.

   Evento *B*: Que la suma sea 5.

   Evento *C*: Que la suma sea un número impar.

   a) De los eventos anteriores, ¿cuáles son mutuamente excluyentes?

   ______________________________

   b) ¿Se puede afirmar que los eventos *A* y *C* son complementarios? __________
   - ¿Por qué? ______________________________

   c) ¿Cuál es un evento complementario a *B*? ______________________________

   ______________________________
   - Si el organizador del juego realiza tres lanzamientos consecutivos, ¿estos eventos son independientes o dependientes? ______________________________

   ______________________________

Comparen sus respuestas con las de otros compañeros y reflexionen sobre las diferencias que encuentren. Verifiquen que sus respuestas sean correctas.

## EL RINCÓN MATEMÁTICO

Al realizar un experimento como lanzar un dado, un volado, extraer de la urna fichas, tarjetas o esferas, hay diversos resultados que pueden darse. Un *evento* es un posible resultado de un experimento. Hasta ahora conocemos los eventos mutuamente excluyentes, que son todos aquellos eventos donde los casos favorables de uno de ellos no forman parte de los casos favorables del otro evento.

Se llaman *eventos independientes* aquellos en los que al darse uno de ellos no interviene en el resultado del otro.

Por otro lado, al sumar los casos favorables de los eventos complementarios resulta que la suma es igual al *espacio muestral* del experimento.





EJE: MANEJO DE LA INFORMACIÓN

TEMA: ANÁLISIS Y REPRESENTACIÓN DE DATOS

## Contenido 7

Diseño de una encuesta o un experimento de identificación de la población en estudio. Discusión sobre las formas de elegir el muestreo. Obtención de datos de una muestra y búsqueda de herramientas convenientes para su presentación.

## LO QUE SÉ

1. Analicen en pareja la siguiente información y completen la tabla.

   Cierta marca de pasta de dientes realizó un estudio sobre higiene bucal con la pasta que ellos producen, para ello encuestó a 5 000 personas de entre 15 y 29 años de edad. La encuesta arrojó que 2 de cada 5 encuestados se cepillan los dientes una vez al día, mientras que el 35 % lo hace dos veces al día; 500 entrevistados lo hacen después de cada uno de sus tres alimentos, y el resto, además de cepillarse los dientes tres veces al día, usa hilo dental.

| Hábito de limpieza diaria | Encuestados | Frecuencia relativa | | | 360° |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Fracción | Decimal | % | |
| Una vez | | | | | |
| Dos veces | | | | | |
| Tres veces | | | | | |
| Tres veces con hilo dental | | | | | |
| Total | | | | | |

   - Comparen sus respuestas con las de otros compañeros, reflexionen sobre las diferencias que encuentren y justifiquen sus argumentos.

2. Con respecto a la situación anterior, contesten las preguntas siguientes.

   a) ¿Para qué sirve la información de la columna con el encabezado "360°"? __________

   ______________________________

   b) ¿Con qué información de la tabla pueden construir una gráfica de barras?

   ______________________________

   ______________________________

   c) ¿Qué método puede usarse para obtener la información contenida en la tabla?

   __________ ¿Por qué? ______________________________

d) ¿Piensan que cualquier persona puede ser parte de este estudio o sólo grupos específicos de la sociedad? ______ ¿Por qué? ______

e) Si el estudio se realizó en el Distrito Federal, donde existen aproximadamente 2 257 025 habitantes de entre 15 y 29 años de edad. ¿Piensan que se encuestaron a todas las personas que usan esa pasta de dientes? ______ ¿Por qué? ______

Comparen sus respuestas con las de otros compañeros, reflexionen sobre las diferencias que encuentren y verifiquen sus respuestas. Por último, con la orientación de su profesor concluyan explicando la importancia que tienen las encuestas en cualquier estudio o investigación.

## PRACTICANDO LO APRENDIDO

1. En equipos, analicen con atención la siguiente situación y resuélvanla.

a) Una fábrica de lácteos quiere colocar a la venta su nuevo producto "Leche +60". Aún no sabe si producirla en sabor fresa, vainilla o chocolate, además, tampoco sabe si le conviene vender la presentación de 500 ml o 1 ℓ. Para resolver este problema quiere realizar una encuesta. Considerando esta información, respondan las siguientes preguntas.

- El gerente de la empresa quiere encuestar a cualquier persona, independientemente de su edad. ¿Ustedes creen que si se realiza la encuesta como sugiere el gerente, se obtendrá información suficiente para realizar el estudio deseado? ______ ¿Por qué? ______
- ¿Qué características debe tener la población de estudio, es decir, las personas a las que se dirige la encuesta, para que la información y resultados de la misma sean confiables? ______
- ¿Qué preguntas deben ser parte de la encuesta para recabar información que permita tomar una decisión adecuada sobre la presentación de este producto? Escríbanlas en el siguiente recuadro.

Comparen sus respuestas con las de otros equipos, reflexionen sobre las diferencias que encuentren y justifiquen las que sean correctas. Posteriormente contesten las siguientes preguntas.

- ¿Qué se debe entender por población de estudio? ______





- ¿Cuántas y cuáles son las preguntas que deben conformar la encuesta para este estudio? ______

Comparen sus respuestas con las de otros compañeros y con la orientación de su profesor concluyan explicando qué es la población de estudio. Escriban sus conclusiones en las siguientes líneas.

b) Analiza la siguiente información.

| Instituto Nacional de Estadística y Geografía | |
|---|---|
| Población | Habitantes |
| 60 años o más | 12 222 625 |

- ¿Piensan que es adecuado entrevistar a toda la población de estudio? ______ ¿Por qué? ______
- ¿Cuántas personas de la población de estudio deben tomarse como muestra, es decir, a cuántas de ellas debe aplicarse la encuesta? ______
- ¿Escogerían como muestra la misma cantidad de encuestados para cada uno de los estados de México? ______ ¿Por qué? ______
- ¿Es correcto tomar como muestra el mismo porcentaje de población para cada estado? ______ ¿Por qué? ______
- ¿Es adecuado elegir como muestra la misma cantidad de mujeres que de hombres? ______ ¿Por qué? ______
- ¿Qué cantidad de la población de estudio debe tomarse como muestra para tomar la mejor decisión en este estudio? ______
- ¿Cómo escogerían la muestra de este estudio? ______

Comparen sus respuestas con las de otros equipos, reflexionen sobre las diferencias que encuentren y justifiquen sus respuestas. Con la ayuda de su profesor concluyan con una explicación de lo que se debe entender como muestra y cuál es la mejor forma de elegir una muestra de estudio. Escriban sus conclusiones en las siguientes líneas.

### Matemáticas con otras ciencias

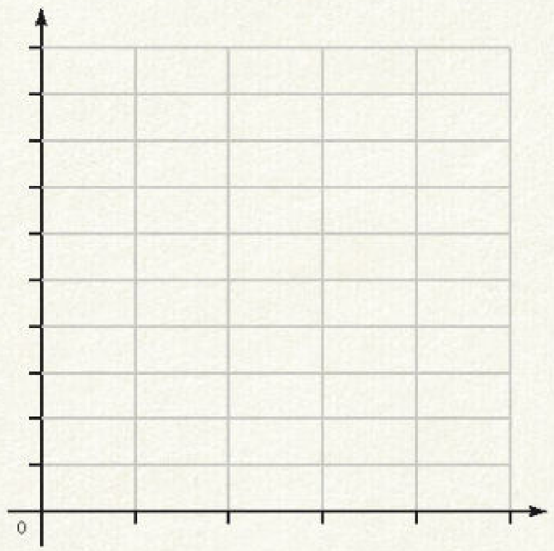
Para enriquecer el tema de las encuestas, puedes retomar tu libro de Español de segundo grado, bloque 4, proyecto tres, en el que realizaste una recopilación de información mediante entrevistas, encuestas o fuentes, de esta manera podrás mejorar en la forma de diseñar y dar a conocer los datos de tus propias encuestas. Así como la encuesta realizada por la "Asociación del Clima" en la que se muestra que el 43 % de la población mundial ve el cambio climático como un problema más grave que el económico.

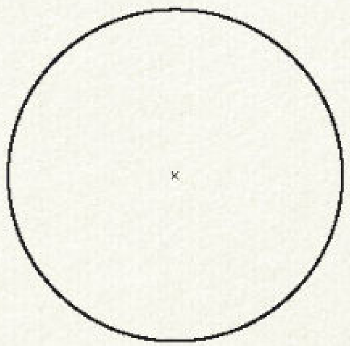
El estudio también revela que el 90 % de las personas jóvenes desea que los líderes políticos hagan más para resolver esa amenaza. Mediante esta encuesta se entrevistó a 12 000 personas de 12 ciudades del mundo, entre ellas, Brasil, Estados Unidos y México. Tres cuartas partes de los encuestados dijeron que esperan que sus países reduzcan sus emisiones de gases de efecto invernadero, y un 55 % cree que sus gobiernos deben invertir en energías renovables. El PNUMA (Programa de Naciones Unidas para el Medio Ambiente) consideró que esos datos representan un llamado inequívoco a los líderes mundiales para que se unan en la lucha contra el calentamiento global.

FUENTE: http://www.un.org/spanish/News/story.asp?NewsID=14199#.UZ-fuqJ94uA (Consulta: 4 de diciembre de 2016.)

c) Considerando las encuestas mencionadas en los incisos a y b, en la fábrica decidieron finalmente tomar una muestra de 100 000 personas como población de estudio. Analicen la información contenida en la siguiente tabla de frecuencias, complétenla y construyan una gráfica de barras y una de sectores en los espacios correspondientes.

| Sabor de leche 500 ml | Encuestados | Frecuencia relativa | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Fracción | Decimal | % | 360° |
| Fresa | | | 0.40 | | |
| Vainilla | | 1/4 | | | |
| Chocolate | | | | 35 | |
| Total | 100000 | | | | |









- ¿Cuál es el sabor que debe producirse en mayor cantidad respecto de los demás?
- ¿Cuál de las dos gráficas permite comunicar de manera más clara los resultados de este estudio?
- ¿Qué ventajas tiene una gráfica sobre la otra?

Comparen sus respuestas con las de otros equipos, analicen las diferencias que hayan encontrado y orientados por su profesor, concluyan sobre la pertinencia de cada tipo de gráfica para presentar la información obtenida en un estudio o investigación, escriban sus conclusiones dentro del siguiente recuadro.

### TIC

La página electrónica http://www.chartgo.com/index_es.jsp permite elaborar gráficas siguiendo una serie de sencillos pasos. Consúltala y realiza tus propias gráficas, compáralas con las de tus compañeros y comenta el tipo de gráfica que utilizaste, considerando la información que quieres dar a conocer.

(Consulta: 4 de diciembre de 2016.)

## APLICANDO LO APRENDIDO

1. En equipos de cinco integrantes como máximo, elijan uno de los siguientes temas de investigación y realícenlo.
   - Cantidad promedio de horas empleadas por un adolescente en videojuegos.
   - Hábitos alimenticios en los alumnos de secundaria.
   - Hábitos de estudio en alumnos de primero de secundaria.
   - Consumo de alcohol en los alumnos de tercer grado de secundaria.
   - Deportes que practican los alumnos de secundaria.
2. De acuerdo con el tema de investigación que eligieron, contesten las siguientes preguntas o realicen lo que se les indica, según corresponda.

   a) ¿Cuál es su tema de investigación?

   b) ¿Cuál es su población de estudio o de investigación?

   c) ¿Cuál es la encuesta que van aplicar?

   d) ¿Cuál es y cómo determinaron la muestra de estudio?

e) ¿Cuáles fueron los resultados de su investigación?

f) Completen la siguiente tabla con la información recopilada en su investigación.

| Tema de investigación: | Encuestados | Frecuencia relativa | | | 360° |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Fracción | Decimal | % | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |

g) En el siguiente recuadro, elaboren la gráfica que les permita presentar de forma más clara sus resultados.

Comparen sus investigaciones con las de otros equipos que eligieron el mismo tema, analicen los resultados y reflexionen sobre las diferencias que encuentren. Por último, contesten lo siguiente.

- Expliquen si el otro equipo eligió correctamente la población de estudio.
- Expliquen si la muestra de investigación es adecuada y confiable.
- ¿La gráfica empleada para presentar la información fue pertinente? ¿Por qué?





3. Analicen las siguientes situaciones y contesten.

a) Una empresa que cuenta con una planta laboral de 2 000 empleados investigó las causas por las que su personal se ausenta con mayor frecuencia los días lunes. Para llevar a cabo esto, el gerente aplicó una encuesta a todos los empleados respecto de las causas probables por las que se ausentan.

- Expliquen si la población de estudio es o no la más adecuada.

b) Según un estudio sobre la efectividad de cierto medicamento, la población que lo consume es de aproximadamente medio millón de personas y se tomó como muestra a 3 de cada 5 pacientes que tienen la enfermedad que ese medicamento puede curar. ¿Es confiable y suficiente la muestra consultada para tomar una decisión sobre esta investigación? ¿Por qué?

c) Para investigar sobre el consumo de la papilla "Bebé contento" en niños de entre 3 y 6 meses de edad, se aplicó la siguiente encuesta a padres de familia.

- Su hijo consume la papilla "Bebé contento"?
- ¿Cuántos años tiene su hijo?
- ¿Cuántos días a la semana su hijo consume "Bebé contento"?
- ¿Qué sabor es su preferido?
- ¿Cuántas veces al día le da biberón a su hijo?

Analicen la encuesta anterior y contesten las siguientes preguntas.

- ¿Cuál o cuáles preguntas no deben formar parte de esta encuesta?
- ¿Qué otra u otras preguntas agregarían a esta encuesta para que sea más eficaz la realización de esa investigación?

Comparen sus respuestas con las de otros compañeros y reflexionen sobre las diferencias que encuentren. Por último, de manera grupal y con la ayuda de su profesor, concluyan sobre cuáles deben ser las respuestas adecuadas para cada planteamiento.

## EL RINCÓN MATEMÁTICO

En una investigación o estudio se debe limitar la población que se va estudiar, es decir, elegir el grupo de personas con todas las características necesarias para recabar la información confiable para dicho estudio. Una vez que se tiene la población de estudio, si ésta es demasiado grande, se debe escoger una muestra, es decir, una parte de la población que permita realizar adecuadamente la investigación para que los resultados sean confiables. Para ello, la muestra se puede elegir aleatoriamente, o bien, bajo ciertos criterios previamente establecidos.

Para presentar la información obtenida en el estudio se emplean las gráficas de barras o las de sectores, además de polígonos de frecuencia, y cada una de ellas son empleadas de acuerdo con el tipo de investigación realizada. Por ejemplo, cuando se busca presentar porcentajes, la *gráfica de sectores* es la más adecuada; en cambio, si se busca resaltar la frecuencia de cada dato, la gráfica de barras o el polígono de frecuencias son más pertinentes.

EVALUACIÓN TIPO PISA

## I. La bandera

1. Roberto se dedica a elaborar banderas de equipos de futbol sin importar el tamaño de éstas; para hacer su trabajo tiene una regla básica: el largo de la bandera debe medir el doble que el ancho. Por ahora él tiene un pedido de tres tamaños diferentes, una de 10 cm de ancho, otra de 5 cm de ancho y otra de 40 cm de ancho. Con alguna de las siguientes expresiones algebraicas se puede determinar el área de cualquier tamaño de las banderas elaboradas por Roberto siguiendo su regla básica. Escribe cuál es esa expresión.

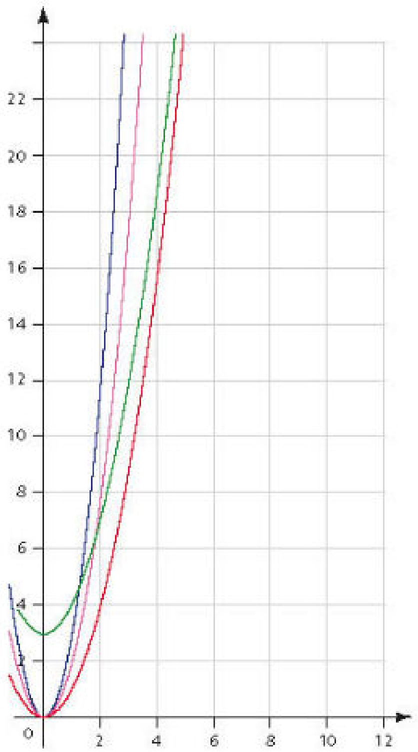
a) $y = 2x$

b) $y = 3x$

c) $y = 2x^2$

d) $y = 3x^2$

2. Analiza las siguientes gráficas. Escribe de qué color es la parábola que representa la relación que existe entre la base y altura de las banderas que elabora Roberto.






EVALUACIÓN TIPO PISA

## II. La tómbola

Dentro de una tómbola hay 10 pares de esferas y cada par tiene un número del 1 al 10. Jorge, para ganar, escogió el evento "Extrae un número par".

1. Analiza los siguientes eventos y si el evento es mutuamente excluyente al de Jorge, subraya la palabra Sí, de lo contrario, subraya la palabra No.

| Evento | Opción | |
|---|---|---|
| a) Extraer un número impar | Sí | No |
| b) Extraer el 2 | Sí | No |
| c) Extraer el 5 | Sí | No |
| d) Extraer un número mayor a 6 | Sí | No |

2. ¿Cuál es el evento complementario al evento de Jorge?

a) Extraer un número impar

b) Extraer un número par mayor a 10

c) Extraer un número par menor a 5

d) Extraer un impar mayor a 5

3. Se extrajo una esfera marcada con el número 5. Explica si el hecho de extraer una nueva esfera, sin haber devuelto a la tómbola la primera, y el de extraer un número par son eventos independientes.

4. Analiza cada uno de los siguientes valores, y si corresponden a la expresión $y = 2x^2$ subraya la palabra Sí, de lo contrario, subraya la palabra No.

| Valor | | Opción | |
|---|---|---|---|
| a) $x = 3$ | $y = 12$ | Sí | No |
| b) $x = 2$ | $y = 8$ | Sí | No |
| c) $x = 4$ | $y = 32$ | Sí | No |
| d) $x = 1$ | $y = 2$ | Sí | No |

Competencias que se favorecen:

- Resolver problemas de manera autónoma.
- Comunicar información matemática.
- Validar procedimientos y resultados.
- Manejar técnicas eficientemente.



# BLOQUE 2

## Aprendizajes esperados

- Explica el tipo de transformación (reflexión, rotación o traslación) que se aplica a una figura para obtener la figura transformada. Identifica las propiedades que se conservan.
- Resuelve problemas que implican el uso del teorema de Pitágoras.

**EJE: SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO**
**TEMA: PATRONES Y ECUACIONES**

## Contenido 8

Uso de **ecuaciones cuadráticas** para modelar situaciones y resolverlas usando la **factorización**.

### LO QUE SÉ

1. Formen equipos de cuatro integrantes como máximo, analicen las siguientes situaciones y contesten las preguntas señaladas.

   a) Inés se dedica a poner uñas postizas. Tiene un promedio de 70 clientes a la semana y cobra $90 a cada cliente, pero cree que puede aumentar sus ingresos si sube el precio; según sus cálculos perderá tres clientes por cada cinco pesos que suba. Ayuden a Inés a llenar la siguiente tabla para que pueda elegir el precio que más le conviene.

**Saber más...**

La Organización para la Cooperación y Desarrollo Económicos (OCDE) opina que el desarrollo de los países y su economía dependen mucho del dominio financiero que tengan sus ciudadanos. Esta educación se refiere tanto a quienes tienen negocios y cómo pueden hacerlos más eficientes, como a los consumidores, que son quienes toman decisiones informadas y exigen servicios de mayor calidad.

FUENTE: "Estadísticas económicas de México", OCDE, recuperado de: http://www.oecd.org/edu/Mexico_EAG2013%20Country%20note%20(ESP).pdf (Consulta: 4 de diciembre de 2016.)

| Incrementos de $5 | Precio | Clientes | Ingresos |
|---|---|---|---|
| 0 | $ 90 | 70 | |
| 1 | | 67 | |
| 2 | $ 100 | | |
| 3 | | | |
| 4 | | | |
| 5 | | | |

- ¿Para qué precio se obtiene el mayor ingreso? ______
- ¿Por qué deja de aumentar el ingreso? ______
- ¿Serán sus ingresos iguales a sus ganancias? ______ ¿Por qué? ______

   b) A partir del precio que dio el mayor ingreso en la tabla anterior, ahora calculen los ingresos de Inés si pierde un cliente por cada peso que le aumenta a su precio y terminen de llenar la tabla. ¿Cómo calculan el número de clientes?

**Libroteca**

Te recomendamos leer el libro:

Rodríguez Vidal, Rafael y M. C. Rodríguez Rigual, *Cuentos y cuentas de los matemáticos*, México, Reverté, 2000. Su lectura te ayudará a resolver los problemas que se presentan. Podrás encontrarlo en tu Biblioteca de Aula.





| Precio | Clientes | Ingresos |
|---|---|---|
| | | |
| | 62 | |
| $ 105 | | $ 6 405 |
| | | |
| | | |

- ¿Cuál es el precio que más le conviene? ______
- ¿Cuántos clientes tendrá si mantiene el precio que más le conviene según los datos que escribieron en la tabla? ______

Comparen sus resultados con los de otros compañeros y reflexionen sobre las diferencias que encuentren. Con la ayuda de su profesor comprueben si sus resultados son correctos.

### PRACTICANDO LO APRENDIDO

1. Trabajando en equipo, resuelvan las siguientes cuestiones.

   a) Se tiene un rectángulo con un perímetro de 20 cm, pero no se conoce el área. ¿Cuál puede ser la medida del largo y del ancho? Para llenar la siguiente tabla sugieran tres pares de medidas para el largo y ancho del rectángulo mencionado, además, calculen el área para cada pareja de datos.

Perímetro = 20 cm $x$

| Largo | Ancho | Área |
|---|---|---|
| | | |
| | | |
| | | |

Comparen sus resultados con los de otros compañeros y reflexionen sobre las diferencias que encuentren. Con la ayuda de su profesor comprueben si sus resultados son correctos y en el siguiente recuadro concluyan respecto a cuál área será mayor y cuál menor.

   b) Para plantear una expresión algebraica que calcule el área de un rectángulo consideremos que el ancho es $x$ y el largo es una cantidad mayor al ancho, es decir, una proporción mayor que $x$; por ejemplo, el largo puede ser dos veces mayor que $x$, tres o 1 ½ veces mayor que $x$. Tomando en cuenta lo anterior, completen la siguiente tabla escribiendo posibles valores para el largo del rectángulo y su respectiva área.

| Largo | Ancho | Área |
|---|---|---|
| x | | |
| x | | |

- ¿La expresión que representa el área del rectángulo puede considerarse una ecuación de segundo grado? ______ ¿Por qué? ______
- ¿Cuál es el término que le da el grado a la ecuación? ______

Comparen sus resultados con los de otros compañeros y reflexionen sobre las diferencias que encuentren. Con la ayuda de su profesor comprueben si sus resultados son correctos.

2. Retomen el problema de Inés resuelto en el inciso a de la sección "Lo que sé". Si el incremento en su precio continúa, llegará el momento en que sus ingresos serán cero. Imaginen un negocio en esta situación.

   a) ¿Cuándo tendría cero ingresos? ______

   ¿Notaron que puede haber dos casos? Si los precios suben demasiado se quedará sin clientes, pero también, si baja demasiado los precios, puede llegar a cobrar $0.

   b) ¿Cómo cambian los ingresos? ¿Cuánto aumentan? ______

   c) ¿Cuánto disminuyen? ______

3. Si ahora se quiere encontrar una ecuación que exprese la situación de los ingresos de Inés, resulta de gran utilidad ver las operaciones que se realizaron. Nuevamente completen la tabla original, pero en esta ocasión escriban las operaciones que realizaron.

| Incrementos | Precio | Clientes | Ingresos |
|---|---|---|---|
| 0 | 90 | 70 | $90 \times 70$ |
| 1 | | $70 - 3$ | |
| 2 | $90 + 5 \times 2$ | | |
| 3 | | | |
| 4 | | | |
| 5 | | | |

Analicen el comportamiento de los datos en la tabla y contesten las siguientes preguntas.

- ¿Cuál es el término que se repite en la columna del precio? ______
- ¿Qué término se repite en la columna de los clientes? ______
- ¿Cuáles datos son los que cambian en las dos columnas mencionadas? ______

Comparen sus resultados con los de otros compañeros y reflexionen sobre las diferencias que encuentren. Con la ayuda de su profesor comprueben si sus resultados son correctos.





## EL RINCÓN MATEMÁTICO

En una fórmula, función o expresión matemática, a los valores numéricos que no cambian se les llama *constantes*; los valores que cambian se conocen como *variables* y se representan por una *literal*, es muy común utilizar la letra $x$, aunque en realidad puede ser cualquier letra.

4. Analicen los datos de la tabla del ejercicio anterior y contesten las siguientes preguntas.

   a) Decidan en equipo, ¿a cuál columna pueden llamar $x$? ______
   ¿Por qué? ______

   - ¿Cuál es la ecuación para el precio, si llamamos $x$ a la columna "Incrementos"? ______
   - Si 90 puede expresarse como $5 \times 18$, entonces podemos emplear esta multiplicación de factores para la ecuación del precio. Escriban la misma ecuación tomando al 5 como factor común para 90 y $5x$. ______
   - ¿Cuál es la ecuación que expresa la situación de los clientes? ______

   b) Para la ecuación de la columna "Ingresos" sólo es necesario multiplicar las expresiones que encontraron para las columnas "Precio" y "Clientes".

   - ¿Cuál es la ecuación correspondiente a los ingresos? ______
   - ¿Es una ecuación cuadrática la expresión que encontraron para la columna "Ingresos"? ______
   ¿Por qué? ______

Comparen sus resultados con los de otros compañeros y reflexionen sobre las diferencias que encuentren. Observen que la última ecuación obtenida es una multiplicación de dos **factores**, es decir, un producto de dos binomios. Con la ayuda de su profesor, comprueben que sean correctos sus resultados.

**Glosario**

**Factores.** Son los elementos que se multiplican en un producto. Por ejemplo, cuando se tiene la operación $5 \times 3 = 15$, los números 5 y 3 son factores de 15.

## EL RINCÓN MATEMÁTICO

Una ecuación de segundo grado se puede expresar con la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a$ es diferente de 0. A esta expresión se le llama *forma general*, y los *coeficientes* son los números $a$, $b$ y $c$, que corresponden a los términos cuadrado, lineal e independiente, respectivamente.

### Matemáticas con otras ciencias

Recordando ejercicios como $(x-5)(x+2)$ dentro de las actividades realizadas en el bloque 3 del curso de Matemáticas 2, contesta las siguientes preguntas.

- ¿Cómo se desarrolla la multiplicación de un par de binomios? ____________________
- ¿Cómo se obtiene el coeficiente del término cuadrático? ____________________
- ¿Cómo se obtiene el coeficiente del término lineal? ____________________
- ¿Cómo se encuentra el término independiente? ____________________

## EL RINCÓN MATEMÁTICO

Se llama factorización al proceso de encontrar los factores o binomios que al ser multiplicados dan como resultado una ecuación cuadrática expresada en su forma general, es decir, en la forma $ax^2 + bx + c = 0$.

1. Tenemos la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ y queremos encontrar los factores $(x + \_\_)(x + \_\_)$ que dan resultado a esa ecuación.

   El término independiente $c$ se obtiene de multiplicar los términos independientes de los binomios, mientras que el término lineal $b$ surge de sumar los productos de los términos independientes de los binomios con los coeficientes de sus términos lineales. Por ejemplo, $x^2 + 3x + 2$ corresponde a dos binomios cuyos términos independientes suman 3 y su producto es 2; de esta manera y aplicando la regla anterior, nuestros factores quedan así $(x+2)(x+1)$.

   En este caso, ambos son positivos, pero si los signos son diferentes, los términos $c$ y $b$ obtienen sus signos al realizar la multiplicación de los términos independientes de los binomios o al sumarlos, según sea el caso.

2. Ahora vamos a factorizar la ecuación $x^2 + 3x - 10$. Primero localizamos $c = -10$ y $b = 3$; buscamos dos números que al multiplicarlos resulte $-10$ y al sumarlos den 3, éstos son 5 y $-2$. Finalmente completamos los binomios y nuestros factores son $(x+5)(x-2)$.

   Para comprobar que la factorización es correcta se realiza el producto de los binomios obtenidos y el resultado debe ser la ecuación en su forma general $ax^2 + bx + c$.

3. Tenemos otro caso para factorizar, $3x^2 - 11x + 10$. Buscamos dos números que multiplicados resulten 10, además, al multiplicar uno de ellos por 3, al otro multiplicarlo por 1 y después sumar estos dos productos, el resultado sea $-11$, de esta manera podemos completar nuestro producto de los binomios $(3x + \_\_)(x + \_\_)$, estos números son $-2$ y $-5$. Finalmente, los factores que dan origen a la ecuación original son $(3x-2)(x-5)$.

4. Ahora factoricemos $6x^2 - 7x - 5$. Buscamos dos números que multiplicados resulten $-5$, éstos pueden ser $-5$ y 1; además, factorizamos el término $6x^2$ con $3x$ y $2x$ para que al multiplicarlos por $-5$ y 1, respectivamente, y después al sumar sus productos, el resultado sea $-7$. Finalmente, encontramos los binomios $(3x-5)(2x+1)$ que originaron la ecuación $6x^2 - 7x - 5$.





## PRACTICANDO LO APRENDIDO

1. Completa los binomios o las ecuaciones, según se requiera, para factorizar las siguientes ecuaciones. Escribe sobre las líneas los términos que faltan.

   a) $x^2 - 10x + 16 = (x - \_\_\_)(x - \_\_\_)$
   b) $x^2 + \_\_\_ x + 25 = (x+5)(x + \_\_\_)$
   c) $4x^2 - 12x + 9 = (\_\_\_\_\_)(2x\_\_\_\_\_)$
   d) $x^2 + 3x - 40 = (x-5)(x + \_\_\_)$
   e) $10a^2 + 11a - 6 = (2a\_\_\_\_\_)(\_\_\_\_\_)$
   f) $b^2 + 15b + 50 = (b\_\_\_)(b+10)$
   g) $5x^2 - 8x + 3 = (\_\_\_\_\_)(\_\_\_\_\_)$
   h) $x^2 + 3x - \_\_\_ = (x+12)(x - \_\_\_)$
   i) $t^2 - 8t + 12 = (t + \_\_\_)(t + \_\_\_)$
   j) $m^2 + 5m - 50 = (\_\_\_\_\_)(\_\_\_\_\_)$
   k) $x^2 - 6x - 72 = (\_\_\_\_\_)(\_\_\_\_\_)$

2. Regresando nuevamente al problema de Inés, revisemos la situación en la que sus ingresos son cero. Seguramente en esa actividad llegaste a la conclusión de que eso sucede cuando no tiene clientes o cuando el precio es cero.

   a) ¿Para cuáles valores de la variable correspondiente Inés no tiene clientes? ____________________

   b) ¿Para qué valores de la variable correspondiente el precio es cero? ____________________

   c) Toma esos valores y sustitúyelos en la ecuación resultante de la columna "Ingresos". ¿Qué sucede? ______________ ¿Coincide con los valores que esperabas de los ingresos? ______________

Compara tus resultados con los de otros compañeros y reflexionen sobre las diferencias que encuentren. Con la ayuda de su profesor comprueben que sus resultados sean correctos.

### Libroteca

Te recomendamos leer el libro:

Cerasoli, Anna, *Sorpresa de los números*, México, Ediciones Maeva, 2007, que puedes encontrar en tu Biblioteca de Aula.

### TIC

En la siguiente página encontrarás algunos ejercicios de factorización de trinomios cuadrados perfectos que te ayudarán a comprender mejor el tema, se encuentra disponible en http://matematica.cubaeduca.cu/index.php?option=com_content&view=article&id=1094 5%3Atema-9nofactorizacion&catid=525%3Atemas-sb (Consulta: 4 de diciembre de 2016.)

Te recomendamos que leas con cuidado las explicaciones y resuelvas los ejercicios.

## EL RINCÓN MATEMÁTICO

Cuando se tiene una ecuación de segundo grado factorizada, si al sustituir los valores de las incógnitas vuelven cero alguno de los factores, toda la ecuación se hace cero. Esta forma de igualar a cero es un método para resolver una ecuación de segundo grado.

## PRACTICANDO LO APRENDIDO

1. Recordando el inciso a de la sección "Practicando lo aprendido", de la página 61, en el que hablamos de un rectángulo del que sólo se conocía el perímetro, pero no el área, realicen las siguientes actividades.

   a) Escriban la expresión que encontraron para representar esta situación. ____________

   b) Igualen a cero esa expresión y encuentren las raíces de la función. Escríbanlas a continuación. ____________ Expliquen cómo pueden interpretarse esos valores. ____________

   c) Calculen el valor de $x$ que está en medio de las **raíces de la ecuación**, es decir, el promedio de las dos. ¿Cuál es el área del rectángulo para ese valor? ____________

   d) ¿Alguien propuso un área mayor a ésta? ____________

**Glosario**

**Raíces de la ecuación.** Dada una función $y = f(x)$, sus raíces son los valores de $x$ para los que $f(x) = 0$.

Si haces una función igual a 0 y resuelves la ecuación que obtienes encontrarás las raíces de la función dada.

Comparen sus resultados con los de otros compañeros y reflexionen sobre las diferencias que encuentren. Con la ayuda de su profesor comprueben que sus resultados sean correctos.

## PRACTICANDO LO APRENDIDO

1. Factoriza las siguientes ecuaciones y encuentra sus raíces.

| | |
|---|---|
| $6x^2 - 13x + 5 = 0$<br>$(\underline{\qquad})(\underline{\qquad}) = 0$<br>$(\underline{\qquad}) = 0$ $(\underline{\qquad}) = 0$<br>$x_1 = \underline{\qquad}$ $x_2 = \underline{\qquad}$ | $4m^2 + 8m + 3 = 0$<br>$(\underline{\qquad})(\underline{\qquad}) = 0$<br>$(\underline{\qquad}) = 0$ $(\underline{\qquad}) = 0$<br>$m_1 = \underline{\qquad}$ $m_2 = \underline{\qquad}$ |
| $x^2 - 36 = 0$<br>$(x - \underline{\quad})(x + \underline{\quad}) = 0$<br>$(x\underline{\quad}) = 0$ $(x\underline{\quad}) = 0$<br>$x_1 = \underline{\qquad}$ $x_2 = \underline{\qquad}$ | $x^2 - \underline{\quad} = 0$<br>$(x + 5)(x - \underline{\quad}) = 0$<br>$(x\underline{\quad}) = 0$ $(x\underline{\quad}) = 0$<br>$x_1 = \underline{\qquad}$ $x_2 = \underline{\qquad}$ |
| $4x^2 - 16 = 0$<br>$(2x - \underline{\quad})(2x + \underline{\quad}) = 0$<br>$(2x\underline{\quad}) = 0$ $(2x\underline{\quad}) = 0$<br>$x_1 = \underline{\qquad}$ $x_2 = \underline{\qquad}$ | $a^2 - 16 = 0$<br>$(a + \underline{\quad})(a - \underline{\quad}) = 0$<br>$(a\underline{\quad}) = 0$ $(a\underline{\quad}) = 0$<br>$a_1 = \underline{\qquad}$ $a_2 = \underline{\qquad}$ |
| $5x^2 + 11x + 2 = 0$<br>$(\underline{\qquad})(\underline{\qquad}) = 0$<br>$(\underline{\qquad}) = 0$ $(\underline{\qquad}) = 0$<br>$x_1 = \underline{\qquad}$ $x_2 = \underline{\qquad}$ | $6t^2 - 11t + 3 = 0$<br>$(\underline{\qquad})(\underline{\qquad}) = 0$<br>$(\underline{\qquad}) = 0$ $(\underline{\qquad}) = 0$<br>$t_1 = \underline{\qquad}$ $t_2 = \underline{\qquad}$ |

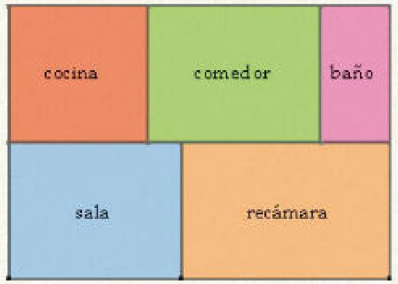




| | |
|---|---|
| $x^2 + \underline{\quad}x + 25 = 0$<br>$(x + 5)(x + \underline{\quad}) = 0$<br>$(x\underline{\quad}) = 0$ $(x\underline{\quad}) = 0$<br>$x_1 = \underline{\qquad}$ $x_2 = \underline{\qquad}$ | $x^2 - 4x + 16 = 0$<br>$(x - \underline{\quad})(x + \underline{\quad}) = 0$<br>$(x\underline{\quad}) = 0$ $(x\underline{\quad}) = 0$<br>$x_1 = \underline{\qquad}$ $x_2 = \underline{\qquad}$ |
| $144 - x^2 = 0$<br>$(12 + x)(\underline{\quad} - \underline{\quad}) = 0$<br>$(\underline{\quad}x) = 0$ $(\underline{\quad}x) = 0$<br>$x_1 = \underline{\qquad}$ $x_2 = \underline{\qquad}$ | $9t^2 - 16 = 0$<br>$(\underline{\qquad})(\underline{\qquad}) = 0$<br>$(3t\underline{\quad}) = 0$ $(3t\underline{\quad}) = 0$<br>$t_1 = \underline{\qquad}$ $t_2 = \underline{\qquad}$ |
| $81 - 9y^2 = 0$<br>$(\underline{\qquad})(\underline{\qquad}) = 0$<br>$(\underline{\qquad}) = 0$ $(\underline{\qquad}) = 0$<br>$y_1 = \underline{\qquad}$ $y_2 = \underline{\qquad}$ | $x^2 - 8x + 16 = 0$<br>$(x - \underline{\quad})(x - \underline{\quad}) = 0$<br>$(x\underline{\quad}) = 0$ $(x\underline{\quad}) = 0$<br>$x_1 = \underline{\qquad}$ $x_2 = \underline{\qquad}$ |
| $x^2 + 16x + 64 = 0$<br>$(x + \underline{\quad})(x + \underline{\quad}) = 0$<br>$(x\underline{\quad}) = 0$ $(x\underline{\quad}) = 0$<br>$x_1 = \underline{\qquad}$ $x_2 = \underline{\qquad}$ | $x^2 - 144 = 0$<br>$(x + \underline{\quad})(x - \underline{\quad}) = 0$<br>$(x\underline{\quad}) = 0$ $(x\underline{\quad}) = 0$<br>$x_1 = \underline{\qquad}$ $x_2 = \underline{\qquad}$ |

Compara tus resultados con los de otros compañeros y reflexionen sobre las diferencias que encuentren. Con la ayuda de su profesor comprueben que sus resultados sean correctos.

2. Se tiene un departamento como el representado en el dibujo siguiente.




Sabemos que la cocina es cuadrada, tiene el mismo ancho que la sala y su área se representa como $x^2 + 6x + 9$. El comedor es $2x$ más largo que su ancho, el baño tiene la tercera parte de largo que el comedor. Por otro lado, el área de la recámara se representa con $2x^2 + 10x + 12$. A continuación encuentren el área de las otras habitaciones.

a) Para encontrar las medidas de la cocina necesitamos una expresión que incluya $x$ y al elevarla al cuadrado resulte la ecuación $x^2 + 6x + 9$, ésa es la medida de un lado de la cocina.

- ¿Cuál es esa expresión? ____________
- ¿Es un binomio? ____________

b) El área del comedor se encuentra combinando en una ecuación la expresión del inciso anterior y la indicación que es $2x$ más largo que su ancho. Esa misma expresión es el ancho de la sala y del resto de las habitaciones.

- ¿Cuál es la ecuación para resolver esta situación? ______
- Ahora que ya conocen el largo y ancho del comedor, calculen su área. ______

c) Para calcular el área del baño todavía hacen falta algunos datos.

- Calculen el largo del baño, que es la tercera parte del largo del comedor. ______
- ¿Cuál es el área que ocupa el baño? ______

d) Ahora necesitamos conocer las medidas de la recámara para poder encontrar el largo de la sala. Para ello, a continuación factoricen la expresión $2x^2 + 10x + 12$.

______

- ¿Cuáles son las medidas de la recámara? ______
- ¿Cuánto mide la sala de largo y de ancho? ______
- ¿Cuál es el área de la sala? ______

Comparen sus resultados con los de otros compañeros y reflexionen sobre las diferencias que encuentren. Con la ayuda de su profesor comprueben que sus resultados sean correctos.

3. Factoriza y resuelve de forma individual las siguientes ecuaciones.

| | |
|---|---|
| $x^2 - 16 = 0$<br><br>$x_1 =$ ______ $x_2 =$ ______ | $m^2 + 10m + 25 = 0$<br><br>$m_1 =$ ______ $m_2 =$ ______ |
| $5v^2 - 125 = 0$<br><br>$v_1 =$ ______ $v_2 =$ ______ | $4m^2 + 8m + 3 = 0$<br><br>$m_1 =$ ______ $m_2 =$ ______ |
| $144 - 9v^2 = 0$<br><br>$v_1 =$ ______ $v_2 =$ ______ | $6x^2 + 11x - 2 = 0$<br><br>$x_1 =$ ______ $x_2 =$ ______ |





| | |
|---|---|
| $3x^2 + 6x + 3 = 0$<br><br>$x_1 =$ ______ $x_2 =$ ______ | $x^2 + 16x + 64 = 0$<br><br>$x_1 =$ ______ $x_2 =$ ______ |
| $6x^2 - 13x + 5 = 0$<br><br>$x_1 =$ ______ $x_2 =$ ______ | $t^2 - 144 = 0$<br><br>$t_1 =$ ______ $t_2 =$ ______ |
| $5x^2 + 11x + 2 = 0$<br><br>$x_1 =$ ______ $x_2 =$ ______ | $x^2 - 4x + 16 = 0$<br><br>$x_1 =$ ______ $x_2 =$ ______ |
| $a^2 - 22a + 121 = 0$<br><br>$a_1 =$ ______ $a_2 =$ ______ | $6t^2 - 11t + 3 = 0$<br><br>$t_1 =$ ______ $t_2 =$ ______ |

Compara tus resultados con los de otros compañeros. Reflexiona con ellos acerca de la forma de factorizar las ecuaciones y pidan ayuda a su profesor para verificar que sus resultados sean correctos.

**TIC**

En este espacio te sugerimos visites la siguiente dirección electrónica, en la que encontrarás información con recomendaciones para aplicar la factorización, información sobre aplicación y resolución de las ecuaciones cuadráticas. Ésta es:

http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Ecuacion_de_segundo_grado/ecuacion.htm#4

(Consulta: 24 de enero de 2017.)

En equipos de dos o tres integrantes, de los ejercicios a resolver o de los ejemplos; inventen un problema que se resuelva con esta ecuación y expónganlo ante sus compañeros de grupo.

**Libroteca**

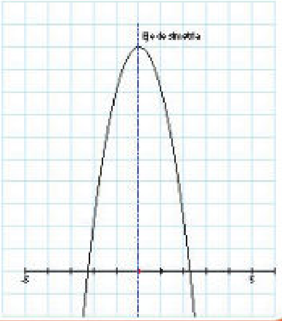
Te recomendamos leer el libro:
Hunter, J. A. H., *Situaciones problemáticas y cómo resolverlas*, México, SEP-Ediciones de Mente, 2004.
Lo podrás encontrar en la Biblioteca de Aula.

## Aplicando lo aprendido

1. Analiza y resuelve individualmente en tu cuaderno las siguientes situaciones. Andrés lanza una pelota al aire alcanzando una altura que depende de la función $t^2 - 5t$.
   - ¿Cuánto tiempo tarda en caer?
   - Si su amigo Luis lanza otra pelota desde el mismo lugar, pero que sigue la función $3t^2 - 15t$, ¿cuál tardará más en caer? ¿Por qué?
   - ¿Cuál llegará más alto?
2. El problema de Inés al comienzo de este contenido fue fácil de resolver en un inicio, pues la ecuación ya estaba factorizada. ¿Qué hubiera sucedido si la ecuación hubiera estado expresada en forma general?

### El rincón matemático

Las funciones de segundo grado tienen como gráfica una parábola, la cual es simétrica, por lo que su valor extremo (máximo o mínimo) se encuentra justo en medio de las raíces, cuando éstas existen.



3. El valor máximo para los ingresos de Inés se encuentra entre $-18$ y $\frac{70}{3}$, así que podemos acercarnos a él encontrando el punto medio entre estos dos valores.
   a) Calcula el promedio entre $-18$ y $\frac{70}{3}$. ____________________
   b) Esto quiere decir que el máximo se encontrará cuando $x =$ ____________
   c) Esto sucede cuando el precio es de $90 + 5($________$) = \$$________ ¿Este valor es igual al valor que encontraste en la tabla?
   ¿Por qué? ____________________
   d) ¿Cuál resultado será mejor? Compruébalo usando la función de ingresos, puede ser la que está factorizada o la que está en forma general.
   No debes usar la igualada a 0, porque no es función, es una ecuación, y ya tiene una solución dada. ____________________

Compara tus resultados con los de otros compañeros. Reflexiona con ellos y tu profesor acerca de la utilidad que tienen la factorización y la solución de ecuaciones cuadráticas en la vida cotidiana.





**Eje: Forma, espacio y medida**

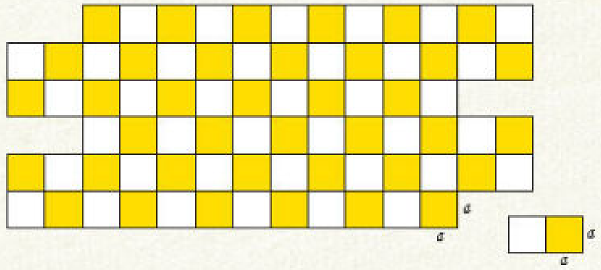
**Tema: Figuras y cuerpos**

## Contenido 9

Análisis de las propiedades de la rotación y la traslación de figuras.

### Lo que sé

1. La imagen siguiente representa un piso que está cubierto por mosaicos rectangulares, como el que se encuentra en la parte inferior. Observa la figura y realiza las actividades requeridas.



   a) ¿Cuántos mosaicos hay en el piso? ____________
   b) Explica cuál fue el procedimiento que usaste para hallar la respuesta. ____________________

2. Recorta un mosaico igual al de la figura y continúa con las siguientes actividades.
   Recorre el piso con un mosaico empezando por la parte inferior derecha. La condición para hacerlo es que no separes el mosaico del piso y que los colores coincidan, sólo puedes hacer desplazamientos hacia la izquierda y la derecha y sólo puedes hacer giros del mosaico de 90° con respecto a una de sus esquinas. Los giros pueden ser en cualquier dirección.
   Por ejemplo, para recorrer la fila inferior, se tiene que desplazar el mosaico cinco veces una distancia $2a$ hacia la izquierda. Después se tiene que girar dos veces (90°) en el sentido de las manecillas del reloj (sentido horario) para dejarlo en la fila siguiente y desplazarlo hacia la izquierda una distancia $2a$ para dejarlo en el extremo izquierdo, y luego empezamos a desplazarlo hacia la derecha hasta llegar al otro extremo, y así, hasta completar el recorrido.
   a) ¿Cuántos desplazamientos a la derecha y a la izquierda, y cuántos giros de 90° en el sentido de las manecillas del reloj y en sentido opuesto se deben hacer para recorrer todo el piso? Contesta en las líneas siguientes.
   Desplazamientos a la derecha: ____________________

Desplazamientos a la izquierda: ____________

Giros en en el sentido de las manecillas del reloj: ____________

Giros en sentido opuesto: ____________

b) Explica a continuación tu procedimiento. ____________

c) ¿El número de desplazamientos y de giros es el mismo si haces el recorrido empezando en la esquina superior derecha? ____________

Explica tu respuesta. ____________

3. Compara tus resultados con los de otros compañeros y reflexionen sobre las diferencias que encuentren. Con la ayuda de su profesor comprueben si sus resultados son correctos.

### Matemáticas con otras ciencias

Como sabes, nuestro planeta se desplaza alrededor del Sol al mismo tiempo que rota sobre su propio eje. Estos movimientos de la Tierra se pueden describir en términos de traslaciones y rotaciones. En los dos primeros bloques de tu libro de Ciencias 2, con énfasis en Física, bloque 1, se habla del trabajo de Galileo, que estudió el movimiento de los planetas y la ley de gravitación universal, que explica, en parte, los movimientos de traslación y de rotación de los planetas.

## PRACTICANDO LO APRENDIDO

### Glosario

**Isometría.** Viene del griego iso, que significa "*igual*", y metro, que significa "*medida*" (de igual medida), y se aplica a las transformaciones geométricas que conservan la medida de las distancias entre segmentos de recta. Esto quiere decir que en las transformaciones rígidas la figura no se deforma ni cambia de tamaño.

En la sección "Lo que sé", hablamos de desplazamientos o traslaciones y de giros o rotaciones. En general, cuando un objeto es la imagen de otro, sean del mismo tamaño o no, decimos que dicho objeto es una transformación del otro. En el caso de las traslaciones y las rotaciones, el objeto cambia de posición pero no cambia de tamaño. En este caso decimos que la **transformación** es rígida o **isométrica**.

## EL RINCÓN MATEMÁTICO

En geometría, cuando un objeto se desplaza sin girar se dice que sucedió una traslación; en cambio, si gira sin que sufra desplazamiento, sucede una *rotación*. Cuando se estudia la rotación o *traslación* de un objeto siempre debe indicarse en qué dirección sucedió el evento, hacia arriba o abajo, hacia la derecha o la izquierda, en el sentido de las manecillas del reloj o en sentido contrario. También se puede decir que giró hacia la derecha o hacia la izquierda.

La *reflexión* es otro ejemplo de una transformación rígida, en ésta se tiene una recta que se puede considerar como la representación de un espejo visto desde su canto, de un lado de la recta está el objeto y del otro su imagen.

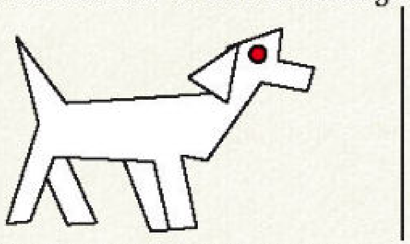




## PRACTICANDO LO APRENDIDO

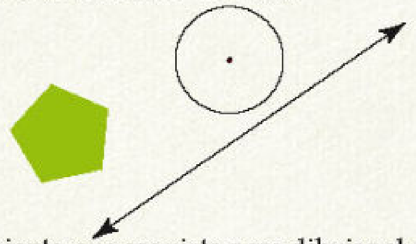
1. Realiza las siguientes actividades de forma individual.

a) En la figura siguiente tenemos la recta de reflexión y la imagen de un perro; dibuja del otro lado de la recta la imagen reflejada del perro.



- Explica el procedimiento que seguiste para reflejar la figura. ____________
- Explica si es posible reflejar esta imagen utilizando sólo traslaciones y rotaciones. ____________

b) En la siguiente figura tenemos un círculo y un pentágono; dibuja su reflejo utilizando sólo traslaciones, rotaciones o ambas.



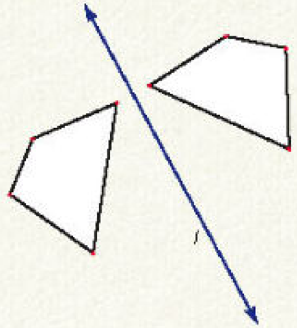
- Explica el procedimiento que seguiste para dibujar el reflejo. ____________

Compara tus dibujos y conclusiones con los de otros compañeros y reflexionen sobre las diferencias que encuentren. Con la ayuda de su profesor comprueben si sus resultados son correctos.

### Saber más...

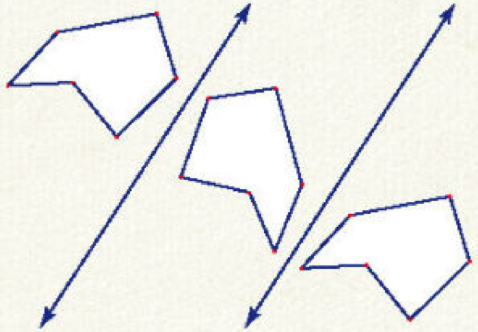
Una teselación o teselado es una composición plana hecha con figuras geométricas (o figuras geometrizadas) que se se repiten de manera periódica y pueden llenar todo el plano. La condición de una teselación es que no haya huecos ni que las figuras se traslapen o se superpongan. Una teselación no siempre se hace con figuras geométricas, como puedes observar en la siguiente imagen, la cual se trata de un trabajo hecho por el artista plástico Maurits Cornelius Escher (1898-1972). Es posible ver la mayoría de sus grabados y pinturas en internet, sólo tienes que teclear su nombre en el navegador.

2. En la siguiente figura se muestra un cuadrilátero y su imagen reflejada con respecto a la recta diagonal.



a) Si unes los puntos correspondientes del cuadrilátero y su imagen con segmentos de recta, ¿por dónde pasa la recta de reflexión y qué ángulo forman? ______

3. Ya vimos que una traslación es el cambio de posición de un objeto, sin girarlo ni cambiar su tamaño ni deformarlo. Es posible tener una traslación si hacemos dos reflexiones. En la figura siguiente tenemos la traslación de un hexágono dibujado de este modo. Primero reflejamos con respecto a una de las rectas (en este caso, la más cercana al polígono) y después reflejamos la imagen con respecto a la otra recta; es requisito que ambas rectas sean paralelas.



a) Mide la distancia entre las dos rectas paralelas y entre puntos correspondientes del hexágono y su imagen trasladada.

¿La distancia entre un punto del primer hexágono y su punto reflejado es igual a la que hay entre este último punto y su reflejo en el tercer hexágono? ______
¿Por qué? ______

¿Qué otras particularidades observas al revisar las medidas que hiciste? ______

4. Explica qué tienes que hacer para trasladar un pentágono cinco centímetros hacia la derecha usando dos reflexiones. ______



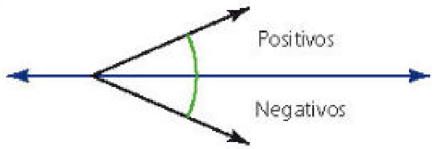


5. Ahora traza en tu cuaderno un polígono que tenga el número de lados que quieras y trasládalo tres centímetros hacia abajo, siguiendo un ángulo de 45°. Explica qué método seguiste para hacer la traslación. ______

Compara tus traslaciones y respuestas con las de otros compañeros. Junto con su profesor reflexionen sobre las diferencias que encuentren y el método que siguieron para hacer las traslaciones.

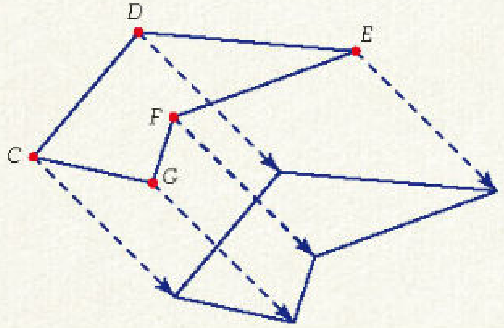
## EL RINCÓN MATEMÁTICO

Un *vector* es una cantidad que tiene *magnitud* y *dirección*. Un ejemplo de vector es la distancia. Por ejemplo, si alguien nos pregunta dónde está la oficina de correos y respondemos "está a 300 metros", la persona que pregunta no será capaz de llegar, pues puede ir en cualquier dirección posible. Es necesario decirle hacia dónde debe caminar, esto es, se le debe decir la longitud y la dirección. En geometría, un vector se representa como en la figura siguiente. La longitud del segmento indica su magnitud, mientras que la flecha nos dice la dirección que tiene.


Si vamos a dar la dirección especificando un ángulo, éste se mide con respecto a una recta horizontal. Si seguimos una dirección opuesta al avance de las manecillas del reloj, entonces el ángulo es positivo y si medimos en la dirección opuesta, entonces el ángulo es negativo, como se muestra en la figura.

6. Si unes los puntos correspondientes del polígono del ejercicio anterior con segmentos, te darás cuenta de que todos tienen una longitud de tres centímetros y apuntan hacia abajo formando un ángulo de 45°. Por ejemplo, en la figura siguiente se tiene un pentágono *CDEFG* y su traslación con respecto a un vector de tres centímetros de longitud y un ángulo de –45° con respecto a la horizontal. En este caso, decimos que la traslación se hizo con respecto a un vector de 3 cm de magnitud y una dirección de –45°.

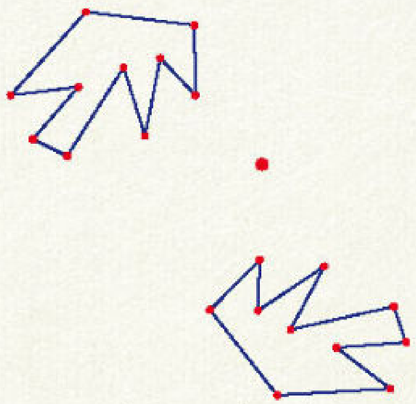


### Glosario

**Trapecio.** Es un cuadrilátero que tiene un par de lados paralelos y otros dos que no lo son. Los lados paralelos se llaman "bases" y la distancia entre ellos se llama "altura".

a) Traza en el siguiente recuadro un **trapecio** y trasládalo según el vector cuya magnitud es de 4 cm y su dirección de 60°.

7. En la figura siguiente se muestra un polígono, su imagen rotada y el centro de rotación.



a) Traza un círculo cuyo centro sea, a su vez, el centro de rotación del polígono y que pase por uno de sus vértices.

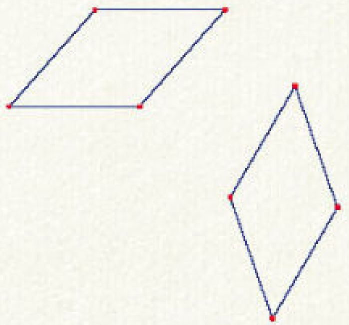
¿Qué puntos de la imagen tocan el círculo trazado? ______

Si trazas uno de estos círculos, ¿puedes determinar el ángulo de rotación? ______ Explica tu respuesta. ______

8. En la siguiente figura tenemos un rombo y su imagen rotada. Usando regla y compás, encuentra el centro de rotación.



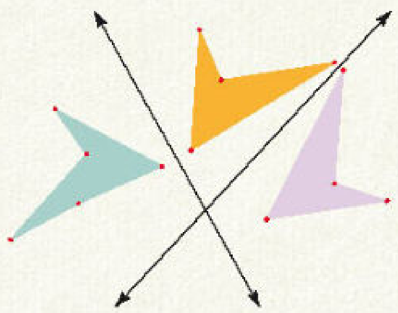




a) ¿Cuál es el ángulo de rotación? ______

b) Analiza con tus compañeros y con tu profesor la manera de encontrar el centro y el ángulo de rotación. Explica a continuación el procedimiento. ______

9. Es posible tener la rotación de una figura si la reflejamos con respecto a dos rectas no paralelas. En la figura siguiente tenemos un polígono azul reflejado dos veces; la imagen resultante es el polígono violeta.



El polígono violeta es la imagen del azul después de que éste sufrió una rotación.

a) ¿En dónde se ubica el centro de rotación? ______

b) ¿Cuál es el ángulo de rotación? ______

10. Considera la manera en que se rota una figura cuando dos rectas no paralelas se intersecan, según se explica en el inciso anterior, para responder las dos siguientes preguntas.

a) Analiza la figura de la actividad del punto 7, y escribe en las líneas qué relación hay entre el ángulo que forman las rectas de reflexión y el ángulo de rotación. ______

b) La afirmación que acabas de escribir es una conjetura, para tener mayor certeza de que la conjetura es cierta, rota otras dos figuras geométricas usando una doble reflexión y determina el ángulo entre las rectas y el punto de rotación. ¿Se cumple la conjetura en estos otros casos? ______

Compara tus respuestas con las de otros compañeros y con ayuda de su profesor reflexionen sobre las diferencias que encuentren. Escriban en el siguiente recuadro sus conclusiones.

### TIC

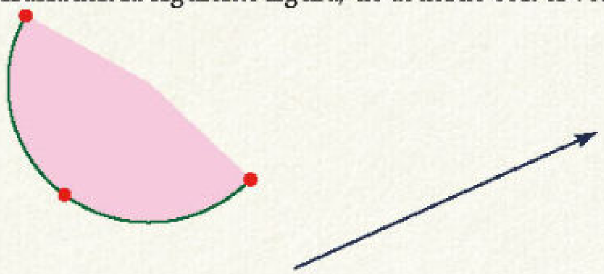
En la siguiente página encontrarás una explicación acerca de los movimientos que se utilizan en el estudio de la geometría. Estos movimientos se pueden definir en términos de transformaciones isométricas. Disponible en:
http://www.iesincagarcilaso.com/Depart/Mates/Matema/alhambra/movim/movim.htm#reflexion
(Consulta: 4 de diciembre de 2016.)
Compara lo que se dice en la página sobre traslaciones, rotaciones y reflexiones con lo que hemos visto hasta ahora. Comenta con tus compañeros y tu profesor las diferencias y similitudes que encuentren.

## APLICANDO LO APRENDIDO

Resuelvan los siguientes problemas, en parejas y en su cuaderno.

1. Analicen la figura siguiente y contesten lo que se les pide.

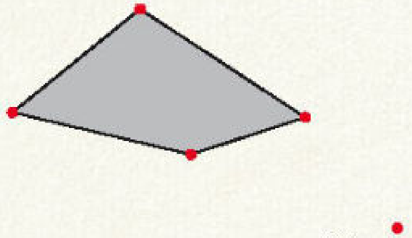
   a) Trasladen la siguiente figura, de acuerdo con el vector que se indica.



   Expliquen cómo hicieron la transformación.

   b) Reflejen dos veces la figura anterior de modo que la imagen sea la misma que en el problema. Expliquen detalladamente el procedimiento que siguieron.

2. Apliquen al siguiente polígono la rotación señalada en ángulo y dirección indicados en cada inciso. Tomen en cuenta el centro de rotación marcado.




   a) Un ángulo de 60°

   b) Un ángulo de –60°

   Expliquen detalladamente el procedimiento que siguieron.

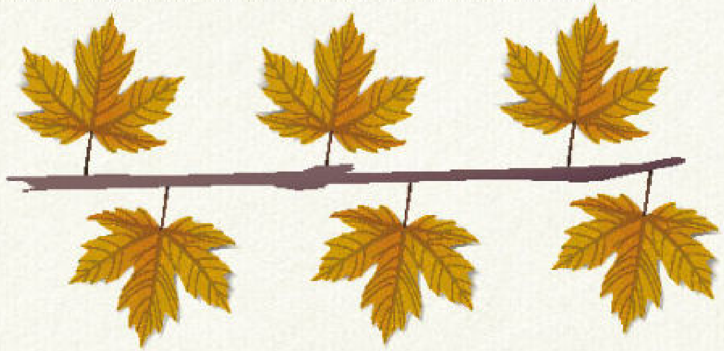
3. Realicen en su cuaderno las mismas rotaciones del problema anterior, pero ahora utilizando dos reflexiones. Expliquen detalladamente el procedimiento que siguieron.

4. En este bloque hemos visto transformaciones isométricas o rígidas. Mencionen qué características tienen las transformaciones no rígidas.





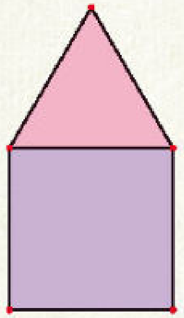
5. En la siguiente imagen tenemos un arreglo de hojas de maple.



   a) Expliquen, en términos de traslaciones y rotaciones, cómo se llega de las hojas de arriba a las de abajo.

   b) Repitan el ejercicio anterior usando solamente reflexiones. Expliquen a continuación su respuesta.

6. Ahora tenemos la siguiente figura formada con un cuadrado y un triángulo equilátero.



   a) Expliquen qué transformaciones debe sufrir el triángulo para que rodee todo el cuadrado.

   b) Expliquen qué transformaciones debe sufrir el cuadrado para rodear al triángulo.

7. ¿Qué transformaciones hay que hacer a uno de los triángulos para obtener la figura que se presenta a continuación?

8. Imaginen que están de pie, con las piernas separadas unos 30 cm y los pies apuntando hacia el frente. ¿Qué transformaciones deben hacer a su pie izquierdo para superponerlo al derecho?

Comparen sus respuestas con las de otros compañeros y con ayuda de su profesor reflexionen sobre las diferencias que encuentren.

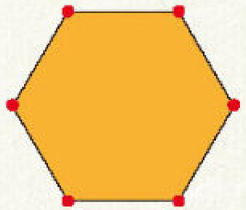
## Contenido 10

Construcción de diseños que combinan la simetría axial y la central, la rotación y la traslación de figuras.

### LO QUE SÉ

Realicen las actividades siguientes en equipos de tres integrantes como máximo. Si es necesario, hagan los trazos requeridos en su cuaderno.

1. Observen la figura siguiente que muestra un hexágono regular y respondan lo que se pide.

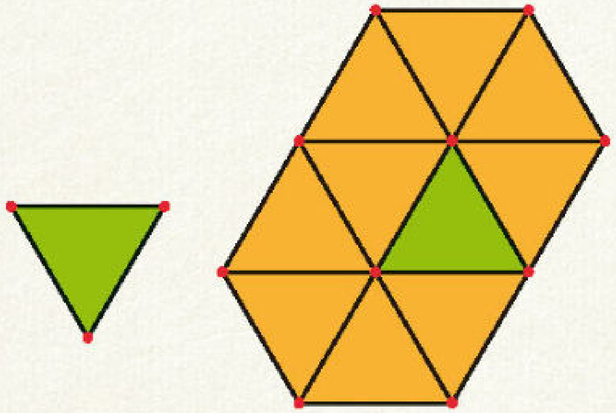


   a) ¿Qué traslaciones deben hacerle para que se cubra todo el plano y los hexágonos no se traslapen? ______

   b) Basándose en lo que respondieron, hagan una teselación de tres hileras de hexágonos. ¿Qué aspectos de su respuesta anterior tuvieron que modificar? ______

2. Ahora tracen un triángulo equilátero usando sólo rotaciones. Expliquen en las siguientes líneas qué método siguieron para trazarlo. ______

3. Usando sólo triángulos equiláteros dibujen una teselación empleando sólo rotaciones. Tomen como ejemplo la figura siguiente.







   a) Basándose en la figura anterior, ¿cuántas rotaciones deben hacer al triángulo equilátero de la izquierda para formar un patrón como el de la derecha? ______

   b) ¿Cuál es el ángulo de rotación? ______

4. La siguiente figura se hizo solamente con rotaciones. Analicen cómo está trazada y contesten lo siguiente.

   a) ¿Cuántas rotaciones hay que hacer para obtener la figura? ______
   b) ¿Siempre es el mismo hexágono el que se rota? ______
   c) ¿Cuál es el ángulo de rotación? ______
   d) Ahora reproduzcan en su cuaderno la figura usando sólo rotaciones y empezando por el hexágono que se encuentra en medio de la figura. Expliquen aquí su procedimiento. ______

5. En los ejercicios 3 y 4 se hicieron teselaciones usando triángulos equiláteros y hexágonos regulares. ¿Se puede hacer lo mismo usando sólo rotaciones de **eneágonos** regulares? Expliquen aquí su respuesta. ______

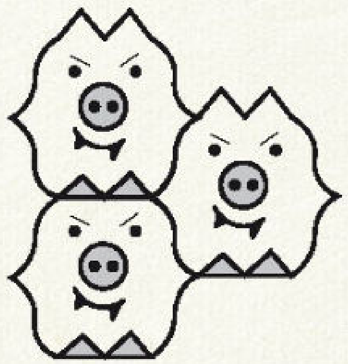
**Glosario**

**Eneágono.** Es un polígono con nueve lados. Si los lados miden lo mismo (es decir, son congruentes), entonces el eneágono es regular.

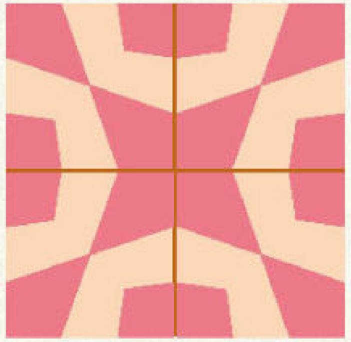
Comparen sus trazos y respuestas con los de otros compañeros y reflexionen sobre las diferencias que encuentren. Con la ayuda de su profesor comprueben si sus resultados son correctos.

## PRACTICANDO LO APRENDIDO

1. Los polígonos regulares tienen simetrías, a veces axiales, otras centrales o ambas. Por ejemplo, el cuadrado tiene simetría axial y son varios los ejes de simetría que posee. En el cuaderno tracen un cuadrado, indiquen sus ejes de simetría y escriban cuántos ejes trazaron. ____________
2. Recuerden las actividades de otros cursos en los que trazaron ejes de simetría en triángulos y contesten lo siguiente.
   a) ¿Cuántos ejes de simetría posee un triángulo equilátero? ____________
   b) ¿Cuántos ejes de simetría tiene un triángulo isósceles? ____________
3. En su cuaderno tracen un hexágono regular. Determinen qué tipo de simetría tiene. Expliquen aquí la respuesta. ____________
4. La figura siguiente está hecha a partir de un hexágono regular y sólo se usaron traslaciones. Observen cómo está trazada la cara de la derecha.
   a) Si empiezan por la cara inferior, ¿qué transformaciones deben hacerle para tener las tres caras de la figura? ____________



5. La figura siguiente muestra parte del piso de una cocina.
   a) ¿Qué tipo de simetrías posee? ____________
   b) Si tiene simetría axial, ¿cuántos ejes de simetría posee? ____________
   c) Si consideramos el "pico central" de la parte superior derecha, podríamos decir que el de la parte inferior izquierda es su imagen rotada en determinado ángulo.
      - ¿Cuánto mide ese ángulo? ____________
      - Si consideran esa rotación como producto de dos reflexiones, ¿se cumple la conjetura que hicieron en el contenido anterior acerca del ángulo de rotación y el ángulo entre las rectas de reflexión? ¿Por qué? ____________



Comparen sus respuestas con las de otros compañeros y reflexionen sobre las diferencias que encuentren. Con la ayuda de su profesor, comprueben si sus resultados son correctos.



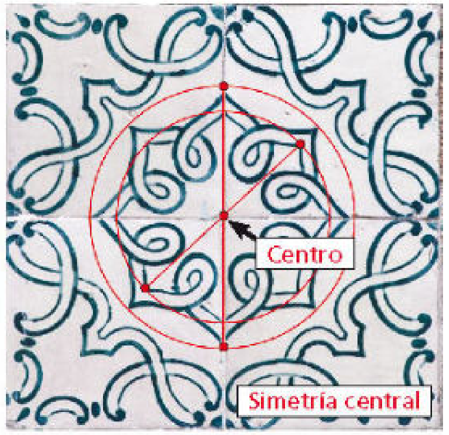


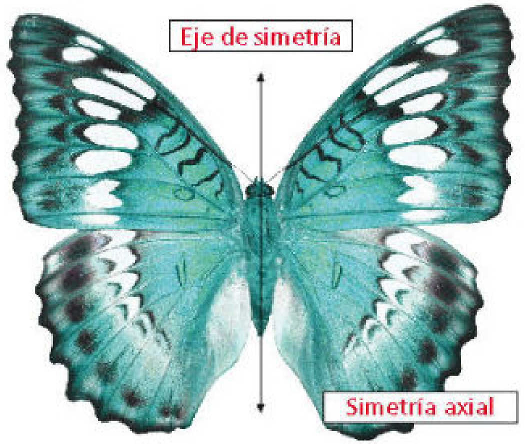
## EL RINCÓN MATEMÁTICO

Hasta este momento hemos visto figuras que poseen algún tipo de simetría, en particular, hemos visto figuras con simetría axial y con simetría central o puntual.

Se dice que una figura tiene simetría axial cuando cada punto de la figura se puede ver como una reflexión con respecto de un mismo eje. Una figura tiene simetría central o puntual cuando cada punto de la figura tiene uno correspondiente, de modo que estos dos puntos son los extremos de un diámetro del mismo círculo, es decir, cada punto es la imagen rotada 180° de otro, con respecto al mismo centro.

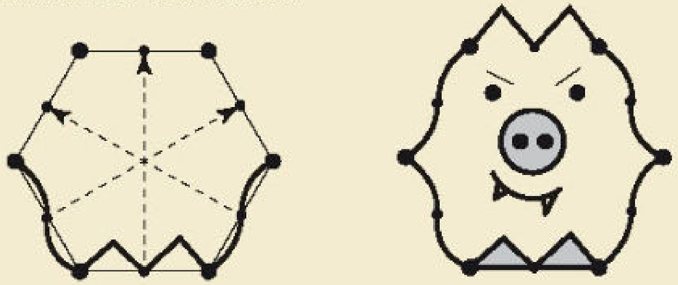
En la figura siguiente se presenta un ejemplo de cada tipo de simetría.




### Saber más...

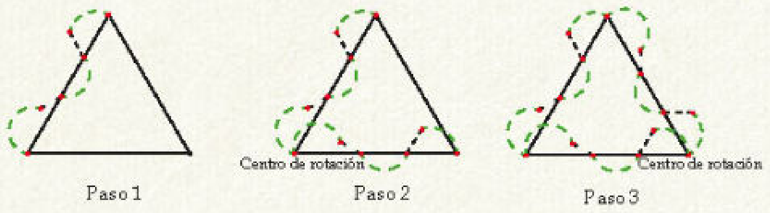
La figura del ejercicio 4 se hizo a partir de un hexágono regular, tomando como base la imagen que presentamos a continuación.



Simplemente se trazan las curvas y los segmentos de tres lados, luego se trasladan según los vectores marcados. Los detalles como el moño y la cara puedes hacerlos como se te ocurra. Una manera de hacer las traslaciones es usando un papel transparente para calcar la figura de la parte inferior y luego reproducirla en la parte de arriba. Otra manera de hacerlo es con un programa para computadora de geometría dinámica, el cual permite dibujar figuras geométricas. Tal vez sea fácil acceder a alguno de ellos. Consúltalo con tu profesor.

## PRACTICANDO LO APRENDIDO

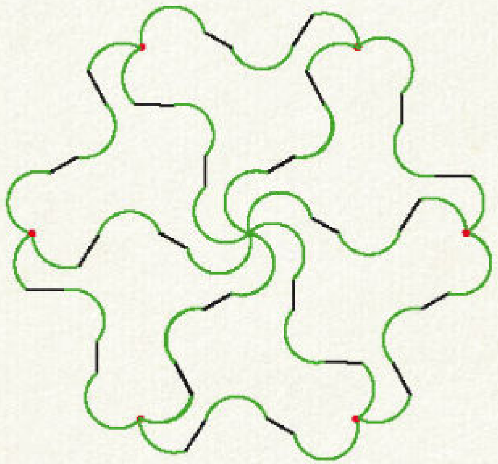
1. En la siguiente figura se muestra cómo hacer la silueta de un dibujo rotando una serie de curvas construidas en el lado de un triángulo equilátero.




a) ¿Cuánto mide el ángulo de rotación en ambas transformaciones? ________

b) Reproduzcan la figura en su cuaderno y dibujen una teselación parecida a la del ejercicio 3 de la sección "Lo que sé". Para hacer las rotaciones pueden calcar la curva del paso 1 en papel transparente y luego hacer las rotaciones con ayuda de una aguja o la punta de un compás.

En la figura inmediata aparece lo que obtuvimos al rotar la figura del paso 3. Esto lo hicimos usando geometría dinámica.



Como sugerencia, pueden organizar un concurso de teselaciones entre los integrantes de su grupo y después organizar una exposición con los trabajos para toda la escuela.

**TIC**

Revisa la siguiente página electrónica, en ella se encuentran muchos ejemplos de teselaciones. Está disponible en:

http://www.disfrutalasmatematicas.com/geometria/teselaciones.html

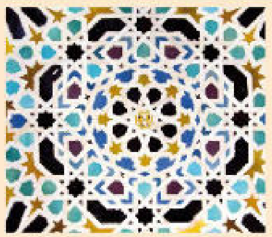
(Consulta: 4 de diciembre de 2016.)

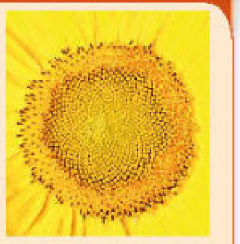
¿Podrías determinar si se hicieron mediante rotaciones, traslaciones o ambas? ¿Podrías decir si la base de la teselación es un triángulo equilátero, un hexágono regular u otro tipo de polígono?





### Matemáticas con otras ciencias



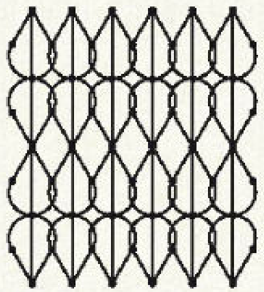


A continuación te mostramos dos fotografías que muestran un patrón circular. Una corresponde a un diseño que se encuentra en La Alhambra, en Granada, España, y la otra muestra la parte central de un girasol.

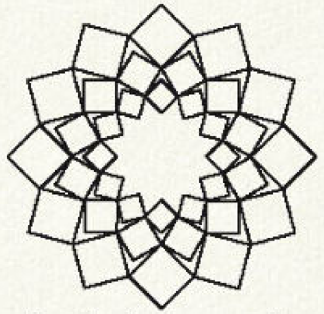
Sin importar si se trata de una obra de arte o una manifestación de la naturaleza, la matemática en general y la geometría en particular son una herramienta poderosa para entender lo que nos rodea. Estas manifestaciones, naturales o no, se pueden apreciar desde el punto de vista del arte visual que estudiaste en tu curso de Artes de primer grado, en el bloque 1, contenido Observación de las imágenes del entorno, identificando sus posibles funciones, usos, temas y significados personales y colectivos.

## APLICANDO LO APRENDIDO

1. El siguiente patrón corresponde al enrejado de una cerca. Analicen cómo se pudo haber formado y describan detalladamente el procedimiento. ________



2. Encuentren qué tipo de simetrías tiene el siguiente patrón, señalen el centro de simetría y el o los ejes de simetría, según sea el caso.



Comparen sus respuestas con las de otros compañeros y reflexionen sobre las diferencias que encuentren. Con la ayuda de su profesor, comprueben si sus trazos y respuestas son correctos.

**EJE: FORMA, ESPACIO Y MEDIDA**
**TEMA: MEDIDA**

## Contenido 11

Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo.

### LO QUE SÉ

1. ¿Cómo se clasifican los triángulos, según la medida de sus lados? Dibuja cada tipo de triángulo en tu cuaderno. ______
2. ¿Cómo se clasifican los triángulos según la medida de sus ángulos? Dibuja cada tipo de triángulo en tu cuaderno. ______
3. Si tienes tres varas rectas de 4, 2 y 1 cm, respectivamente, ¿puedes construir con ellas un triángulo? Explica tu respuesta. ______
4. Si tienes tres varas rectas de 3, 2 y 5 cm, respectivamente, ¿puedes construir un triángulo con ellas? Explica tu respuesta. ______
5. ¿Cuál sería la condición para que con tres varas rectas puedas construir un triángulo? Explica tu respuesta. ______
6. ¿Qué tipo de triángulo puedes construir con tres varas de 3, 4 y 5 cm? ______
   ¿Con varas de 5, 12 y 13 cm? ______
7. Tomando en cuenta los resultados del ejercicio 6 y lo que viene en la sección "El rincón matemático", ¿puedes decir qué tipo de triángulos forman en general las *tripletas pitagóricas*? ______
8. Compruébalo con los siguientes tres números: 12, 16 y 20. ______
9. Completa la siguiente afirmación: Una tripleta pitagórica formada por los números $a$, $b$ y $c$, cumple con la condición ______, y con ella se forman triángulos ______.

Compara tus respuestas con las de tus compañeros y reflexiona sobre las diferencias que encuentres.





### PRACTICANDO LO APRENDIDO

1. ¿Cuál es la tripleta pitagórica que se forma con los números 2 y 7? ______
2. El *método de Diofanto* parece funcionar bien con números enteros, ¿se podrá aplicar a números no enteros? Prueba con el siguiente par de números, usa dos cifras decimales en tus cálculos: 3.3 y 5.1.

   Tripleta pitagórica obtenida con 3.3 y 5.1: $a$ = ______, $b$ = ______ y $c$ = ______

   $a^2$ = ______, $b^2$ = ______, $c^2$ = ______

   $a^2 + b^2$ = ______

### EL RINCÓN MATEMÁTICO

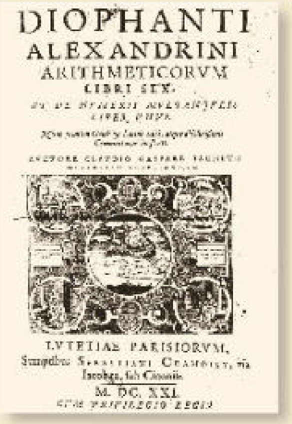
A la tríada de números enteros como 3, 4 y 5 se le llama *tripleta pitagórica*, y tiene la característica de que si tomamos el cuadrado de las dos cifras menores y los sumamos, el resultado es el mayor elevado al cuadrado. Esto es:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

Una de las conclusiones a las que podemos llegar con las tripletas pitagóricas y con el hecho de que forman triángulos rectángulos, es que la suma del cuadrado de los lados menores de un triángulo rectángulo es igual al cuadrado del lado mayor. Reescribe lo anterior en términos de catetos e hipotenusa.

### Saber más...

Diofanto de Alejandría fue un matemático griego que vivió a mediados del siglo III. La mayor parte de su obra se ha perdido, pero queda parte de un tratado titulado *Aritmeticorum* (Aritmética) que, según los historiadores, consistía en 13 libros, de los cuales se conservan 6. En la ilustración te presentamos la portada del libro 6.




Diofanto ideó la siguiente manera de determinar tripletas pitagóricas:

- Toma dos números enteros cualesquiera, por ejemplo 6 y 3.
- Toma sus cuadrados y súmalos: $6^2 = 36$ y $3^2 = 9$, entonces, $36 + 9 = 45$
- Toma el producto de los dos números y duplícalo: $2(6)(3) = 36$
- Toma, por último, el cuadrado de los dos número y réstalos: $36 - 9 = 27$

Entonces la tripleta pitagórica es 45, 36 y 27.
¿Puedes comprobarlo?

## PRACTICANDO LO APRENDIDO

1. Dibuja un triángulo rectángulo donde se muestre la relación entre el cuadrado de los catetos y el cuadrado de la hipotenusa, es decir, sobre cada uno de sus lados construye el cuadrado correspondiente.

2. ¿Qué relación hay entre el área de los cuadrados que están sobre los catetos con respecto al área del cuadrado que se construyó sobre la hipotenusa? ______________________

Compara tus respuestas con las de tus compañeros y reflexiona sobre las diferencias que encuentres. Con la ayuda de tu profesor revisa que tus respuestas sean correctas.

## EL RINCÓN MATEMÁTICO

La siguiente demostración de la conclusión a la que llegaste en las dos actividades anteriores se debe al famoso Leonardo da Vinci. Queremos presentártela porque Leonardo utilizaba sólo transformaciones rígidas para llegar a la conclusión de que la suma del cuadrado de los catetos de un triángulo rectángulo es igual al cuadrado de la hipotenusa. A continuación te mostramos el proceso que siguió para su demostración.

En la figura 1 tenemos dos triángulos rectángulos congruentes, en los que se ha trazado un cuadrado en sus catetos.

El segmento *BE* es un eje de simetría de la figura 1. Vamos a transformar esta figura usando sólo isometrías, es decir, transformaciones rígidas.

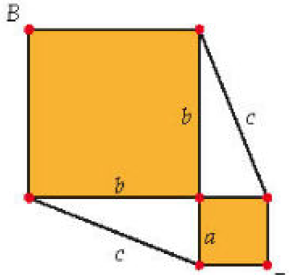


figura 1





El siguiente paso es tomar sólo una de las mitades de la figura que determina el segmento *BE*. Esto se muestra en la figura 2.

En esta figura, el punto *H* es el punto medio del segmento *BE*.

Si rotamos esta segunda figura 180° con respecto al punto *H*, obtenemos la figura 3.

Recuerda que las transformaciones son rígidas, es decir, el área de esta última figura es la misma que el área de la primera.

Si unimos los puntos extremos de las dos hipotenusas de los triángulos rectángulos, obtendremos la figura 4, el cuadrado en amarillo tiene un área igual a $c^2$.

Comparemos ahora las dos figuras, la primera y la última.

En primer, lugar las dos áreas son iguales. Si a la primera le quitamos los dos triángulos rectángulos queda sólo el área en naranja, que es igual a $a^2 + b^2$. Mientras que si a la última le quitamos el área de los dos triángulos (idénticos a los primeros), el área que queda es la del cuadrado amarillo, $c^2$, es decir, $a^2 + b^2 = c^2$.

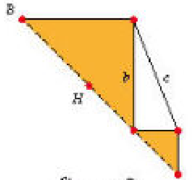


figura 2

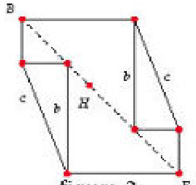


figura 3

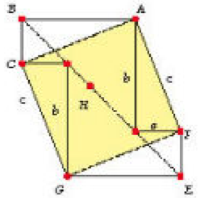


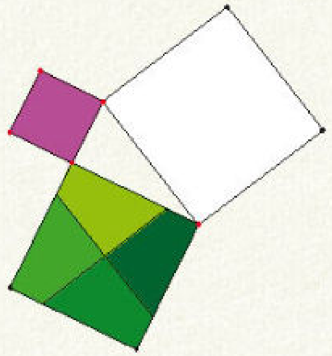
figura 4

## APLICANDO LO APRENDIDO

Resuelvan los siguientes problemas, en parejas.

1. Si trazamos triángulos equiláteros en los lados de un triángulo rectángulo, ¿cómo es el área del triángulo construido sobre la hipotenusa con respecto a las áreas de los triángulos trazados sobre los catetos? ______________________

2. En su cuaderno, tracen con regla y compás una figura idéntica a la siguiente.



Los dos segmentos del cuadrado del cateto mayor se intersecan en el centro del cuadrado y son paralelos a los lados del cuadrado construido en la hipotenusa. Calquen los dos cuadrados de los catetos, recorten el cuadrado más

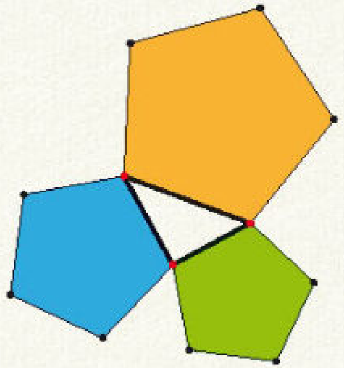
**TIC**

El teorema de Pitágoras es una de las teorías de las que más demostraciones se han hecho en la historia. La que presentamos en este texto es una demostración visual, pues sólo con verla es posible convencerse de su validez. En la siguiente página encontrarás varias ilustraciones de este teorema y se encuentra disponible en: http://roble.pntic.mec.es/~jarran2/cabriweb/1triangulos/teoremapitagoras.htm (Consulta: 4 de diciembre de 2016.)

pequeño y recorten el otro dividiéndolo en los cuatro cuadriláteros interiores (en verde). Usen estas piezas para llenar el cuadro que está en blanco.

a) ¿Qué pueden decir del área de los dos cuadrados de los catetos con respecto al otro cuadrado? ______

3. En la figura se tiene un triángulo rectángulo en el cual se trazaron pentágonos a partir de cada uno de sus lados. Calculen el área de los tres pentágonos.



a) ¿Qué se puede decir de la relación de las áreas de los pentágonos construidos en los catetos, con respecto al área del pentágono construido sobre la hipotenusa? ______

4. En las actividades 1 y 3 se tienen polígonos construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo.

a) ¿Se repetirá la relación que encontraron si construyen cualquier polígono sobre los lados de un triángulo rectángulo? ______
   - ¿Es correcto sustituir? Explica tu respuesta. ______

b) ¿Pasa lo mismo si construyen semicírculos? ______
   - ¿Es correcto sustituir? Explica tu respuesta. ______

5. ¿Qué tipo de figuras se deben construir en los lados de un triángulo rectángulo para que se cumpla la condición que encontraron en los ejercicios anteriores? ______

a) ¿La relación se cumple para triángulos que no sean rectángulos? ______
   - ¿Por qué? ______

Comparen sus respuestas con las de sus compañeros y reflexionen sobre las diferencias que encuentren. Con la ayuda de su profesor, comprueben que sus respuestas son correctas.





**EJE: FORMA, ESPACIO Y MEDIDA**

**TEMA: MEDIDA**

## Contenido 12

Explicitación y uso del teorema de Pitágoras.

### LO QUE SÉ

1. ¿Puedes construir un triángulo rectángulo cuyos lados midan 3 cm, 5 cm y 7 cm? Explica tu respuesta. ______
2. Dibuja en el siguiente recuadro un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 3 cm y 6 cm, calcula la longitud de la hipotenusa con tres decimales. Mide su longitud y compara los resultados.

   a) Longitud calculada: ______
   b) Longitud medida: ______
   c) ¿Cuál de los dos valores es más preciso? Explica tu respuesta. ______

3. Dibuja un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mida 7 cm y uno de los catetos sea de 4.5 cm. Calcula la longitud del otro cateto con tres decimales. Mide su longitud y compara los resultados.

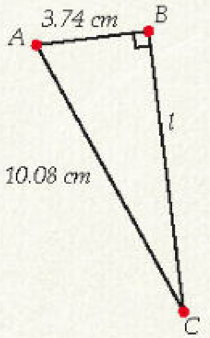
   a) Longitud calculada: ______

b) Longitud medida: ______

c) ¿Cuál de los dos valores es más preciso? Explica tu respuesta. ______

4. En los dos ejercicios anteriores aplicamos el teorema de Pitágoras. Escribe con tus palabras qué dice este teorema. ______

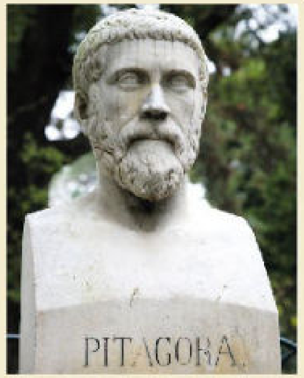
5. En la figura de la derecha tenemos un triángulo rectángulo y la longitud de dos de sus lados.




Aplica el teorema de Pitágoras para hallar la longitud del lado que falta. Explica cuáles fueron los pasos que seguiste para hallar el resultado. ______

Compara tus resultados con los de otros compañeros y reflexionen sobre las diferencias que encuentren. Con la ayuda de su profesor comprueben si sus resultados son correctos.

## Saber más...




Pitágoras fue un filósofo y matemático griego que vivió aproximadamente en el año 500 a.n.e. A él se le atribuye la demostración de la conjetura que establecimos en el ejercicio 4 de "Practicando lo aprendido", en la lección anterior. Aunque las tripletas pitagóricas y la relación entre los lados de un triángulo rectángulo se conocían desde mucho antes, pues hay evidencias de que la cultura babilonia ya conocía la conjetura hace unos 6 mil años.

Se dice que los egipcios usaban cuerdas que tenían nudos puestos a longitudes de una tripleta pitagórica, por ejemplo, separados entre sí a distancias de 3, 4 y 5 unidades, y usaban esto para trazar ángulos rectos en la determinación de terrenos.

Actualmente hay mucha información, sobre todo en internet, respecto a Pitágoras y la escuela filosófica que fundó. Te recomendamos que le eches un vistazo. ¿Puedes imaginar cómo era la vida cotidiana en aquellas épocas?

## Practicando lo aprendido

Resuelvan los siguientes problemas en equipos de dos o tres compañeros.

1. Las bases de un campo de béisbol están situadas en los vértices de un cuadrado de 28 m de lado. ¿Cuál es la distancia que recorre una pelota lanzada desde *home* hasta la segunda base, siguiendo una línea recta? ______



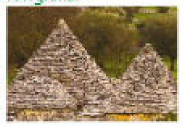


2. Se tiene un **silo** cónico de 5 m de radio en la base y una distancia exterior entre la base y la cúspide de 13 m. Calculen la altura del silo. ______

3. Juan Francisco Quezada y su novia Gertrudis Alatriste planean fugarse. El cuarto de Gertrudis está en el segundo piso y tiene una ventana que da a la calle. Si el **alféizar** de la ventana está a 3.5 m de altura y Juan Francisco calcula que debe poner el pie de la escalera a un metro de la base del edificio para que ésta no resbale, ¿qué longitud debe tener la escalera para llegar a la ventana desde la calle? En su cuaderno hagan un dibujo que represente la escalera con la ventana y expliquen aquí sus razonamientos.

### Glosario

**Silo.** Es un depósito de granos, por lo general tiene forma cilíndrica, pero también hay silos cónicos, como los que se muestran en la fotografía.



**Alféizar.** Es una vuelta o derrame que hace la pared en el corte de una puerta o ventana, tanto por la parte de adentro como por la de afuera, dejando al descubierto el grueso del muro.

4. Clarisa va a comprar una pantalla de televisión y quiere saber si va a caber en el mueble de su sala, el cual tiene un hueco rectangular, destinado para ese fin, de 65 cm de largo por 50 cm de alto. En la tienda, el vendedor le dice que sólo tienen pantallas de 22", 32" y 45" (pulgadas) y le explica que la medida de las pantallas corresponde a su diagonal.

a) ¿Cuál de las medidas se acerca más a la diagonal del hueco de su mueble? ______

b) Clarisa decide comprar esta pantalla, pero al llegar a su casa resulta que no entra en el hueco. Expliquen dónde falló su razonamiento. ______

5. Utilicen el siguiente recuadro para graficar los puntos (–3, 5) y (2, –1). Tracen un sistema de coordenadas y usen el teorema de Pitágoras para calcular la distancia entre ellos.

Expliquen el procedimiento que siguieron. ______

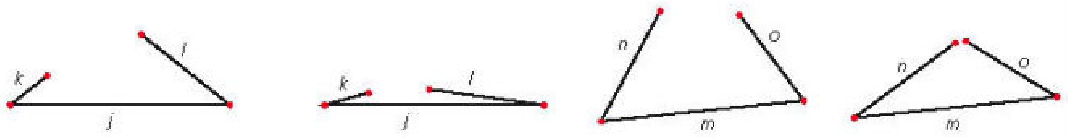
Comparen sus resultados y gráficas con los de otros compañeros y reflexionen sobre las diferencias que encuentren. Con la ayuda de su profesor comprueben si sus resultados son correctos.

## EL RINCÓN MATEMÁTICO

No siempre es posible construir un triángulo cuyos lados tengan una longitud arbitraria. Es necesario que la suma de dos de los lados sea mayor al tercero, esto se conoce como la desigualdad del triángulo, y dice lo siguiente:

En un triángulo cualquiera la suma de la longitud de dos de sus lados es mayor que la longitud del tercero.

En la figura siguiente se ilustra la desigualdad del triángulo.




si $k + l < j$ entonces **no** se puede formar un triángulo

si $n + o > j$ entonces **sí** se puede formar un triángulo

### Saber más...

Según la información presentada por Greenpeace, en México se producen cada día más de 100 mil toneladas de basura doméstica. ¿Imaginas toda esta basura tirada en el parque al que sales a caminar? Ya no digamos el olor, la posibilidad de enfermedades y en general la contaminación. Es importante hacer todo lo que esté en nuestras manos por producir menos basura, al igual que colocarla en lugares adecuados.

FUENTE: "Basura cero", Greenpeace México, recuperado de:

http://www.greenpeace.org/mexico/es/Campanas/Toxicos/basura-cero/

(Consulta: 4 de diciembre de 2016.)

### TIC

En la siguiente página electrónica puedes encontrar más información sobre el teorema de Pitágoras. Se encuentra disponible en:

http://www.disfrutalasmatematicas.com/geometria/teorema-pitagoras.html

(Consulta: 4 de diciembre de 2016.)

¿La información coincide con lo que has aprendido en este contenido? Escribe en tu cuaderno el teorema de Pitágoras como una proposición "Si..., entonces...".

## APLICANDO LO APRENDIDO

Resuelvan los siguientes ejercicios en parejas.

1. Para llegar de un punto a otro en un parque que tiene forma rectangular, pueden seguirse dos trayectorias. Una es a lo largo de dos lados del rectángulo, cuyas longitudes son de 5.7 m y 7.5 m, la otra es a lo largo de su diagonal. ¿Cuál es la distancia que se ahorraría si se hace el recorrido por la diagonal? ______

2. Un paracaidista desciende desde una altura de 2 km y aterriza a 700 m del punto que está justo debajo del lugar de lanzamiento. ¿Qué distancia recorrió durante su descenso? ______

3. Los rieles de una vía de ferrocarril tienen una longitud de 50 m. Una vía férrea se tendió durante el invierno en el desierto de Sonora, y al siguiente verano, debido al efecto del calor, los rieles aumentaron su longitud en 0.13 cm, desplazándose hacia arriba en las junturas. ¿Cuál es la distancia del desplazamiento? ______





Discutan con sus compañeros y con su profesor si esa distancia sería suficiente para que el tren se descarrile.

4. En el espacio contiguo grafiquen los siguientes puntos (5, 4), (1, 1) y (5, 1). Tracen un sistema de coordenadas, encuentren el perímetro y el área del triángulo que forman.

   a) Perímetro: ______

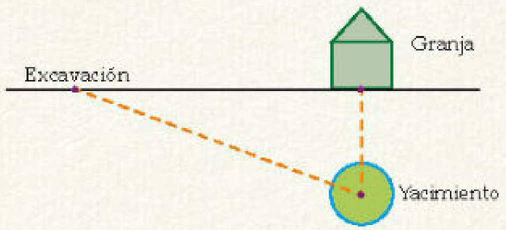
   b) Área: ______

5. Construyan en su cuaderno un triángulo rectángulo isósceles con 2 cm por cateto. Sobre la hipotenusa de ese triángulo construyan otro triángulo rectángulo isósceles, de modo que la hipotenusa del primer triángulo sea uno de los catetos del segundo. Sigan este procedimiento hasta tener 7 triángulos cuyos catetos forman una espiral.

   a) ¿Cuál es la longitud de la espiral? ______

   b) Expliquen cómo llegaron a la solución. ______

6. Una compañía minera sabe que justo a 70 m debajo de la casa de un granjero se encuentra un yacimiento mineral. Pero el granjero no quiere vender su propiedad, por tanto, compraron el terreno de junto. Empezaron a cavar a una distancia de 320 m de la casa del granjero.




   a) ¿Qué extensión debe tener la excavación para llegar al yacimiento? ______

   b) Expliquen el procedimiento que siguieron para llegar a su respuesta. ______

Con la ayuda de su profesor reflexionen respecto a si es suficiente excavar un túnel con la extensión obtenida para llegar al yacimiento o hace falta algo más. Escriban aquí sus conclusiones. ______

Eje: Manejo de la información

Tema: Nociones de probabilidad

## Contenido 13

Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma).

### Lo que sé

**Glosario**

**Aleatoria.** Se dice que un evento es aleatorio cuando depende del azar, cuando al repetir una misma acción puede haber resultados diferentes. En contraposición, se dice que un suceso es determinístico cuando para una acción siempre se obtiene el mismo resultado.

1. Si respondes en forma **aleatoria** un examen de cuatro preguntas de opción múltiple, ¿de qué depende tu calificación? __________

2. ¿Es lo mismo si tienes tres o cinco opciones en cada pregunta? __________

   a) ¿Cómo te conviene más, de tres o cinco opciones? __________

   b) ¿Si esas preguntas son de falso y verdadero, te conviene más? Explícalo. __________

3. Imagina que realizas este experimento con un examen de cuatro preguntas de falso y verdadero. Es muy probable que obtengas resultados diferentes, por ejemplo, puedes tener correcta la primera, y las demás incorrectas. Conviene buscar una forma breve y clara para describirlo, por ejemplo (b, m, m, m).

   a) Enlista todos los resultados posibles. __________

   b) ¿Cuántos posibles resultados hay en una respuesta correcta? __________

   c) Escribe cuántos resultados posibles hay en dos respuestas correctas. __________

   d) ¿Cuántos resultados puede haber en tres respuestas correctas? __________

   e) Calcula cuántos resultados hay en más de dos respuestas correctas. __________





### Practicando lo aprendido

1. Consideren el experimento del examen de la sección "Lo que sé". ¿Qué es más probable, tener una respuesta correcta o dos? ¿Por qué? __________

2. Como el examen es de falso y verdadero la posibilidad de equivocarse y de atinar es la misma, por eso podemos aplicar el enfoque clásico.

   a) Calculen la probabilidad de tener una respuesta correcta. __________

   b) Calculen la probabilidad de tener dos respuestas correctas. __________

   c) ¿Cuál de estas probabilidades es mayor? __________

   d) ¿Coincide con lo que esperaban? __________

   e) Si les piden tener más de dos respuestas correctas para aprobar, ¿cuál es la probabilidad de que aprueben? __________

3. Cada una de estas preguntas se refiere a la probabilidad de un evento:

   Tener una respuesta correcta.

   Tener dos respuestas correctas.

   Aprobar.

   Otros eventos pueden tener sólo una respuesta correcta o tener sólo la primera respuesta correcta.

   Una respuesta correcta es un evento compuesto, pues se tiene la posibilidad de cualquiera de estos cuatro eventos simples, como tener sólo la primera respuesta correcta, tener sólo la segunda respuesta correcta, tener sólo la tercera respuesta correcta o tener sólo la cuarta respuesta correcta.

   Enlisten tres eventos compuestos y compárenlos con los que tienen otros compañeros. __________

### El rincón matemático

Recordando algunos conceptos estudiados en el bloque 1 de este curso de Matemáticas, podemos decir que un *suceso* o *evento* es todo conjunto de resultados o consecuencias de un procedimiento o experimento cualquiera. La *probabilidad* estudia eventos que provienen de un experimento *aleatorio*.
Un suceso o *evento simple* es aquel que no podemos desglosar en componentes más simples, mientras que un evento compuesto combina dos o más sucesos simples.
El espacio *muestral* es el conjunto de todos los eventos simples posibles, es decir, incluye todos los resultados de un experimento.
La *probabilidad* se puede definir de diferentes formas, la llamada probabilidad clásica define la probabilidad de un suceso como el cociente (división) del número de formas o casos en que este evento puede suceder entre el número total de resultados posibles. Esta definición sólo es válida si todos los casos tienen la misma probabilidad.
$P(A)$ = (número de formas en que puede ocurrir $A$) / (número de sucesos simples diferentes)
$P(A)$ = (casos favorables) / (casos totales)

**Saber más...**

Se pueden encontrar muchos datos curiosos y cuya probabilidad no es la que parece. Por ejemplo, si inhalas profundamente, hay una probabilidad mayor al 99% de que inhales una molécula que un compañero cercano exhaló en su último aliento. Otra curiosidad mucho más fácil de comprobar es que en un grupo de 25 estudiantes, la probabilidad de que haya por lo menos dos personas que cumplan años el mismo día es más de 0.5.

## Practicando lo aprendido

1. Dos estudiantes, que no llegaron a clase el día del examen, pusieron como pretexto que venían juntos y se reventó una llanta del auto. El profesor acepta hacerles el examen al día siguiente, pero incluye una pregunta donde les pide que indiquen cuál fue la llanta que se ponchó.
   a) Escribe las combinaciones posibles de respuesta de los dos estudiantes, por ejemplo, el primero dice "delantera derecha" y el segundo "delantera izquierda", etcétera. ____
   b) ¿Cuántas combinaciones son? ____
   c) Escribe un ejemplo de un evento simple. ____
   d) Escribe un ejemplo de un evento compuesto, ¿en cuáles eventos se puede descomponer? ____
   e) ¿Cuál es la probabilidad de que ambos digan que fue la llanta delantera derecha? ____
   f) ¿Cuáles respuestas mostrarían al profesor que en realidad tuvieron un accidente? ____
   g) ¿Cuál es la probabilidad de que el profesor descubra que es mentira? Recuerda: casos favorables entre casos totales. ____

**Libroteca**

Para que te sigas adentrando en el mundo de las matemáticas, te recomendamos leer el libro: Campos Pérez, Mario, *Andrés y el dragón matemático*, España, Editorial Laertes, 2005, el cual podrás encontrar en tu Biblioteca de Aula.

2. Algunos eventos compuestos tienen elementos en común, y en ocasiones podemos pensar que suceden ambos casos. Por ejemplo, en el experimento del examen, de la sección "Lo que sé", definimos el evento $A$ como "tienes sólo una respuesta correcta" y el evento $B$ como "tienes la primera respuesta correcta".
   a) ¿Cuáles son los casos favorables al evento $A$? ____
   b) ¿Cuáles son los casos favorables al evento $B$? ____
   c) ¿Cuáles casos son comunes a ambos eventos? Estos elementos componen lo que llamamos **intersección** de los eventos $A$ y $B$. ____

**Glosario**

**Intersección.** En teoría de conjuntos, es la operación entre dos conjuntos que da como resultado otro conjunto, el cual contiene los elementos comunes a los dos primeros. Se denota con el símbolo $\cap$.





## Practicando lo aprendido

1. Retomando el problema del examen y considerando los datos siguientes, contesten las preguntas en equipos de tres integrantes.
   La probabilidad de que tengan exactamente una respuesta correcta es:
   $P(A) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$
   La probabilidad de que tengan la primera pregunta correcta es:
   $P(A) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que tengan correcta sólo la primera respuesta? ____
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que tengan correcta la primera pregunta o sólo una pregunta correcta? ____
   c) ¿Qué relación encuentran entre $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ y $P(A \cup B)$? ____
   d) ¿Qué hubiera sucedido si no tuvieran elementos en común? ¿Cómo sería la probabilidad de la intersección? ____
   e) ¿Cómo sería la probabilidad de la unión? ____
2. Sigamos pensando en el problema del examen, pero ahora consideremos eventos que no tengan elementos en común, es decir, que tengan una intersección vacía. Por ejemplo, $E$ = {tienen exactamente dos respuestas correctas} y $F$ = {tienen sólo la primera respuesta correcta}.
   Analicen y resuelvan las siguientes actividades, que son ejemplos de **eventos ajenos**.
   a) $P(F)=$ ____
   b) $P(E)=$ ____
   c) $P(E \cap F)=$ ____
   d) $P(E \cup F)=$ ____

Comparen sus resultados con los de otros compañeros y con la ayuda de su profesor reflexionen sobre las diferencias que encuentren.

**Glosario**

**Eventos ajenos.** Dos eventos son mutuamente excluyentes o ajenos si no es posible que sucedan ambos, es decir, si la probabilidad de su intersección es 0.

## El rincón matemático

La probabilidad de que suceda el evento $A$ o el evento $B$, es igual a la suma de la probabilidad de cada uno de los eventos menos la probabilidad de que ocurran ambos al mismo tiempo, es decir:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

## PRACTICANDO LO APRENDIDO

1. Retomemos los eventos del ejercicio 1 de la página 99 y definamos un nuevo evento $C$, que consiste en tener sólo la última respuesta correcta, consta de un solo elemento (m, m, m, b).
   a) ¿Cuál es la intersección entre $A$ y $C$? ______
   b) ¿Cuál es su probabilidad? ______
   c) ¿Cuál es su unión? ______
   d) ¿Cuál es la probabilidad de $A \cap C$? ______
   e) ¿Es cierto que $P(A \cup C)=P(A)+P(C)-P(A \cap C)$? ______
   f) Discútanlo con las otras parejas y explíquenlo. ______

### Saber más...

Según datos publicados por la UNICEF, en 2005 hubo 144 670 casos de adolescentes que tuvieron un hijo o su primer embarazo entre los 12 y 18 años y que no habían concluido su educación básica.
http://www.unicef.org/mexico/spanish/ninos_6879.htm
(Consulta: 4 de diciembre de 2016.)

### TIC

En http://www.matemath.com/azar/index.html se pueden encontrar distintos procedimientos, como tiros de monedas, loterías o juegos en los que se aplica el tema de la probabilidad. Por ejemplo, en el tema "El lenguaje del azar", en la sección "Problemas del tema", se encuentra la actividad "El príncipe y su astrólogo": http://www.matemath.com/azar/problemas/astrologo.html donde se plantean diferentes eventos con monedas.

Después de consultar esas páginas, compartan con el grupo algunas situaciones que se abordan ahí.

(Consulta: 4 de diciembre de 2016.)

## PRACTICANDO LO APRENDIDO

Resuelvan en equipos de dos o tres compañeros las siguientes actividades.

1. Una pareja recién casada planea tener tres hijos, se preguntan si serán niñas o niños.
   a) Escriban los resultados posibles. ______
   b) ¿Cuántos son? ______
   c) ¿Cuál es la probabilidad de que tengan una niña? ______
   d) Escriban la probabilidad de que tengan dos niñas. ______
   e) ¿Cuál es la probabilidad de que tengan una o dos niñas? ______
   f) Anoten la probabilidad de que tengan una y dos niñas. ______
   g) ¿Estos eventos son excluyentes? ¿Por qué? ______
   h) ¿Cuál es la probabilidad de que no tengan una niña? ______
   i) ¿Cuál es la probabilidad de que no tengan ningún hijo? ______
   j) ¿Cuál es la diferencia entre estas dos últimas preguntas? ______
2. Pensemos en un espacio muestral definido como {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} y los eventos $A$ = {pares}, $B$ = {mayores de tres}, $C$ = {impares}. Calculen:
   a) $P(A)=$ ______   e) $P(A \cap B)=$ ______
   b) $P(B)=$ ______   f) $P(A \cap C)=$ ______
   c) $P(A \cup B)=$ ______   g) $P(A \cap B \cap C)=$ ______
   d) $P(A \cup C)=$ ______   h) $P(A \cup B \cup C)=$ ______





3. También podemos tener eventos **complementarios**. Pensemos nuevamente en nuestro examen de falso y verdadero.
   Llamemos $A$ al evento que consiste en tener una respuesta correcta, y sea $D$ el complemento de $A$.
   a) ¿Cuáles son los elementos del evento $D$? ______
   b) ¿Cuál es la probabilidad del evento $D$? ______
   c) ¿Cómo es la probabilidad de la intersección $A \cap D$? ______
   d) Indiquen cómo es la probabilidad de la unión $A \cup D$. ______
   e) ¿Sucede esto con todos los eventos complementarios? ______

Con la ayuda de su profesor comprueben que sus respuestas son correctas.

### Glosario

**Complementarios.** Dos conjuntos son complementarios cuando son ajenos y su unión corresponde al espacio muestral, es decir, que uno tiene lo que al otro le falta. $A'$ se lee como $A$ complemento y consta de todos los elementos que no están en $A$, también se puede escribir como $A^c$.

## EL RINCÓN MATEMÁTICO

Para calcular la probabilidad de que suceda $A$ o $B$, se sugiere una suma así:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$   si $A$, $B$ son eventos ajenos.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$   si $A$, $B$ no son ajenos.

## APLICANDO LO APRENDIDO

1. Tenemos el conjunto de las vocales, elegimos una vocal al azar. Definimos los eventos $A$={a}, $B$={e, i}, $C$={a, e, i}.
   a) ¿Cuáles de estos eventos son ajenos? ______
   b) ¿Cuál es el complemento del evento $B$? ______
   c) Expliquen en qué consiste cada uno de los siguientes eventos.
      $A \cup B$ ______   $A \cup C$ ______
      $A \cap B$ ______   $A \cap C$ ______
   d) Calculen las siguientes probabilidades.
      $P(A)=$ ______   $P(A \cup B)=$ ______
      $P(A \cup C)=$ ______   $P(A \cap B)=$ ______
      $P(A \cap C)=$ ______
2. Retomando el problema de los recién casados de la sección "Practicando lo aprendido", definimos el evento $A$= {tienen dos niñas}. Contesten lo siguiente.
   a) ¿Cuál es la probabilidad del evento $A$? ______
   b) ¿Cuál es la probabilidad de $A'$? ______
   c) Define un evento $B$ que sea ajeno a $A$. ______
   d) ¿Cuál es la probabilidad del evento $B$? ______
   e) ¿Cuál es la probabilidad de $B \cap A$? ______

Comparen sus respuestas con las de otros compañeros y reflexionen sobre las diferencias que encuentren.

EVALUACIÓN TIPO PISA

Lee cuidadosamente los siguientes problemas y después responde lo que se te pide.

**I. Venta de Discos**

Con motivo del aniversario luctuoso de José Pablo Moncayo, se prepara la publicación de un disco con su famoso *Huapango* y una serie de paisajes de su natal Jalisco para fomentar el turismo. El estudio de mercado muestra que a un precio de $290 se pueden vender 7 000 discos, pero por cada reducción de $5 se venderán 300 discos más.

1. Encuentra la expresión algebraica correspondiente a las ventas. ____________
   a) ¿Cuál es el precio que conviene para que las ventas sean máximas? ____________
2. Si los costos de producción son de $95 por disco:
   a) ¿Cuál es la expresión correspondiente a las ganancias? ____________
   b) ¿Con qué precio se quedarán sin ganancias? ____________
   c) ¿Con qué precio tendrán una ganancia máxima? ____________

**II. En tus huellas**

Imagina que estás parado con las piernas separadas unos 30 cm y los pies apuntando hacia el frente, de modo que la distancia entre cada pie es de 25 cm.

1. ¿Qué transformaciones debes hacer a tu pie izquierdo para superponerlo al derecho? Considera el pie izquierdo adelante. ____________

**III. La colcha de María**

María quiere hacer una colcha que tenga un diseño especial. El patrón que piensa usar es un cuadrado de tela rosa que tiene cosido, en cada lado, un triángulo equilátero color gris claro.

1. Haz un dibujo del diseño que se forma.

**IV. Vuelta al globo**

1. Un globo aerostático está a 30 metros de altura y se encuentra sujeto al suelo con una cadena de 50 metros completamente tensa. Si Tomasa se para justo debajo del globo, ¿a qué distancia del pie de la cadena se encuentra?

   a) 45 metros
   b) 25 metros
   c) 40 metros
   d) 58 metros
   e) 30 metros





EVALUACIÓN TIPO PISA

**V. ¡Todos a bordo!**

La siguiente tabla de datos corresponde a los pasajeros del Titanic.

| | Hombres | Mujeres | Niños | Niñas |
|---|---|---|---|---|
| Sobrevivientes | 332 | 318 | 29 | 27 |
| Muertos | 1360 | 204 | 35 | 18 |

1. Si eliges al azar un pasajero, calcula la probabilidad de que sea:
   a) Mujer ____________
   b) Sobreviviente ____________
   c) Hombre ____________
   d) Mujer y sobreviviente ____________
   e) Mujer o sobreviviente ____________
   f) Mujer u hombre ____________

**VI. ¡Feliz cumpleaños!**

1. En su aniversario, una compañía repartirá $72 000 entre sus empleados. Este año ha contratado a seis personas más, por lo que cada empleado recibirá $600 menos que el año pasado.
   a) ¿Cuánto recibió cada empleado el año pasado? ____________
   Justifica tu respuesta. ____________

**VII. La función debe continuar**

1. Señala la función cuadrática cuyas raíces sean $x = 3$ y $x = 5$.
   a) $2x^2 - 16x + 30 = 0$
   b) $x^2 - 8x + 15 = 0$
   c) $x^2 - 8x - 15 = 0$
   d) $x^2 + 8x + 15 = 0$

**VIII. En el casino**

1. Una ruleta de casino tiene 38 ranuras. Una ranura es 0, otra doble 0 y las otras están numeradas del 1 al 36.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de ganar? ____________
   Justifica tu respuesta ____________
   b) ¿Cuál es la probabilidad de perder si se escoge sólo un número? ____________
   Justifica tu respuesta ____________

**IX. Armonía en el juego**

1. Una ruleta francesa (o europea) es un círculo dividido en 37 ranuras. Las ranuras están coloreadas alternadamente en blanco y negro, con excepción de una que está en verde. Considerando que antes de tener color todas las ranuras son iguales, responde.
   a) ¿Cuántos ejes de simetría tiene la ruleta? ____________
   b) ¿Cuál es el ángulo que forman dos ejes de simetría consecutivos? ____________
2. Una ruleta americana consta de 38 ranuras. Dos coloreadas en verde y las otras en blanco y negro; las ranuras verdes están una frente a la otra, y las ranuras rojas y negras están alternadas.
   a) ¿Cuántos ejes de simetría hay antes de poner color a las ranuras? ____________
   b) ¿Cuál es el ángulo entre ejes consecutivos? ____________
   c) ¿Se conserva la simetría cuando ya están coloreadas? ____________
   Justifica tu respuesta. ____________

Competencias que se favorecen:

- Resolver problemas de manera autónoma.
- Comunicar información matemática.
- Validar procedimientos y resultados.
- Manejar técnicas eficientemente.



# BLOQUE 3

## Aprendizajes esperados

- Resuelve problemas que implican el uso de ecuaciones de segundo grado.
- Resuelve problemas de congruencia y semejanza que implican utilizar estas propiedades en triángulos o en cualquier figura.

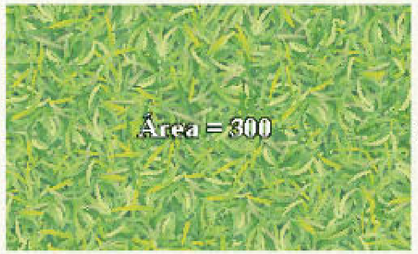
## EJE: SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO
### TEMA: PATRONES Y ECUACIONES

## Contenido 14

Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones.

### LO QUE SÉ

Resuelvan en equipos de tres integrantes las siguientes actividades.




1. Un jardín de forma rectangular tiene un área de 300 m². ¿Qué medidas puede tener para abarcar esa área? ______

   a) El largo del jardín mide 5 m más que el ancho, si representamos el ancho del jardín con $x$, ¿cuál es la ecuación que representa el área? ______

   b) Aun cuando la ecuación que encontraron está factorizada, es decir, tiene la forma $(x + a)(x + b) = 300$, no podemos resolverla como lo hicimos en el bloque 2, pues no es igual a cero. Desarrollen el producto igualándola a cero. ¿Cuál es la nueva ecuación? ______

   c) Factoricen para resolverla. ¿Cuáles son sus resultados? ______

   d) ¿Ambos son la solución al problema? Expliquen su respuesta. ______

   e) ¿Cuáles son las dimensiones del jardín? ______

2. Francisco y Raúl son dos hermanos cuyas edades suman 23 años y al multiplicarlas el resultado es 102. Responde las siguientes preguntas para que encuentres la ecuación que representa la relación que existe entre las edades de este par de hermanos.

   a) ¿Cuáles son los números cuya suma es 23 y su producto da 102? ______

   b) Completa el siguiente producto de binomios con los números encontrados:

   $$(x + \_\_\_\_)(x + \_\_\_\_) = 0$$

   c) Completa la siguiente frase considerando las edades de Francisco y Raúl: El término $a$ resulta de multiplicar los coeficientes de la incógnita ___, el término $b$ es la suma ___ + ___, y el término $c$ = ___, es el producto ___ $x$ ___.

   d) Escribe la ecuación cuadrática en su forma general que representa la relación que existe en las edades de Francisco y Raúl. ______

Comparen sus resultados con los de otros compañeros y reflexionen sobre las diferencias que encuentren. Con la ayuda de su profesor comprueben si sus resultados son las soluciones a la ecuación.





### Saber más...

En la antigua India (siglo V) a la matemática se le denominaba Ganitam, y al álgebra como *Bijaganitam*, donde el término *Bija* significa "otro" o "en segundo lugar" y *Ganitam*, "matemática", por lo que se interpreta que era ya considerado aparte de los cálculos convencionales. Los árabes mejoraron las artes y las ciencias en los lugares que invadieron, en particular, adaptaron las matemáticas que observaron en la India y le dieron el nombre de *Al-Jabr* que significa "unión de las partes sueltas", que luego cambió a *Álgebra*.
El Papiro Rindh, escrito en Egipto en 1650 a.n.e., muestra la resolución de ecuaciones de primer grado y se nota que podían resolver algunas ecuaciones de segundo grado. Pasarían nada menos que 1 500 años hasta que un griego, Diofanto de Alejandría, diera con la fórmula que conocemos ahora como la fórmula general de segundo grado.
Si quieres saber más, puedes encontrarlo en las siguientes direcciones electrónicas:
http://euler.mat.uson.mx/depto/publicaciones/apuntes/pdf/2-1-1-india.pdf
http://ciencimat.wordpress.com/2010/03/16/una-historia-muy-curiosa/
(Consulta: 5 de diciembre de 2016.)

### PRACTICANDO LO APRENDIDO

Estudien en parejas el método descrito en la sección "Rincón matemático", correspondiente a este contenido y resuelvan las siguientes actividades.

1. Analicen las siguientes ecuaciones de segundo grado en su forma general y localicen los coeficientes $a$, $b$ y $c$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) $x^2 - 3x + 2 = 0$ | donde $a$ = ____ | $b$ = ____ | $c$ = ____ |
| b) $x^2 - x - 6 = 0$ | donde $a$ = ____ | $b$ = ____ | $c$ = ____ |
| c) $6x^2 - x - 222 = 0$ | donde $a$ = ____ | $b$ = ____ | $c$ = ____ |
| d) $x^2 + 5x - 24 = 0$ | donde $a$ = ____ | $b$ = ____ | $c$ = ____ |
| e) $x^2 - 2x - 15 = 0$ | donde $a$ = ____ | $b$ = ____ | $c$ = ____ |
| f) $5x^2 - 7x - 90 = 0$ | donde $a$ = ____ | $b$ = ____ | $c$ = ____ |
| g) $36x^2 - 8x - 5 = 0$ | donde $a$ = ____ | $b$ = ____ | $c$ = ____ |
| h) $3x^2 - 5x + 2 = 0$ | donde $a$ = ____ | $b$ = ____ | $c$ = ____ |

### EL RINCÓN MATEMÁTICO

Existe una forma de encontrar los valores de $x$ que satisfacen una ecuación de segundo grado de la forma general $ax^2 + bx + c = 0$, y es aplicando la siguiente fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ésta es la fórmula general para hallar las raíces de una ecuación de segundo grado. Se dice *las raíces* y se usan los signos ±, *más menos*, porque la *raíz cuadrada* de un término cuadrático puede ser *positiva o negativa*. Para aplicar esta fórmula, sólo es necesario escribir la ecuación en su forma general, identificar los coeficientes, incluyendo los signos, sustituir los mismos en la fórmula, resolverla y hallar las raíces.

2. Transformen las siguientes expresiones algebraicas a la forma general para ecuaciones de segundo grado y localicen los coeficientes $a$, $b$ y $c$.

**Libroteca**

Para complementar el tema te recomendamos leer el libro:

Ruiz, Concepción y Sergio Regulés, *Crónicas algebraicas*, México, Santillana, 2002, el cual podrás encontrar en los Libros del Rincón.

**TIC**

En la siguiente página web hay una explicación de las tres formas en que se pueden hallar las raíces de una ecuación cuadrática, se encuentra disponible en http://ponce.inter.edu/cremc/cuadratica.html (Consulta: 5 de diciembre de 2016.)

¿Cuál de ellas te parece más sencilla?

| Expresión | Forma general | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|
| $x^2 = -15x - 56$ | | | | |
| $x^2 - (7x + 6) = x + 59$ | | | | |
| $x(x + 3) = 5x + 3$ | | | | |
| $x^2 + 4x = 285$ | | | | |
| $x^2 = 19x - 88$ | | | | |
| $(x - 9)(x + 7) = 0$ | | | | |
| $(x + ½)^2 = 5$ | | | | |
| $3x^2 - 2x(x - 4) = x - 12$ | | | | |

3. Ahora veremos cómo aplicar la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas.

a) Transformen $3x^2 = -7x + 2$ a la forma general igualando a cero. ______

b) Identifiquen los coeficientes de la ecuación.

$a =$ ______

$b =$ ______

$c =$ ______

c) Completen la fórmula con los valores de los coeficientes.

$$x = \frac{-\ \ \pm\sqrt{\ \ ^2 - 4(\ \ )(\ \ )}}{2(\ \ )}$$

d) Escriban los valores de las raíces de la ecuación.

$x_1 =$ ______

$x_2 =$ ______

Comparen sus resultados con los de otros compañeros y reflexionen sobre las diferencias que encuentren. Con la ayuda de su profesor, comprueben si sus resultados son correctos.





## Aplicando lo aprendido

1. Encuentren las raíces de las ecuaciones cuadráticas que se presentan a continuación aplicando la fórmula general.

| | |
|---|---|
| $x^2 - 7x = 2$<br>$x_1 =$ ______ $x_2 =$ ______ | $7a^2 + 3a - 2 = 0$<br>$a_1 =$ ______ $a_2 =$ ______ |
| $5y^2 = -7y + 1$<br>$y_1 =$ ______ $y_2 =$ ______ | $m^2 - 16m + 64 = 0$<br>$m_1 =$ ______ $m_2 =$ ______ |
| $6x^2 - 3x - 5 = 0$<br>$x_1 =$ ______ $x_2 =$ ______ | $t^2 - 81 = 0$<br>$t_1 =$ ______ $t_2 =$ ______ |
| $m^2 + 11m + 2 = 0$<br>$m_1 =$ ______ $m_2 =$ ______ | $x^2 - 4x + 16 = 0$<br>$x_1 =$ ______ $x_2 =$ ______ |
| $4x^2 + 17x + 4 = 0$<br>$x_1 =$ ______ $x_2 =$ ______ | $x^2 + 3x - 28 = 0$<br>$x_1 =$ ______ $x_2 =$ ______ |

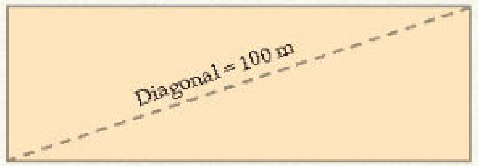
Comparen sus resultados con los de otros compañeros y reflexionen sobre las diferencias que encuentren. Con la ayuda de su profesor comprueben si sus resultados son correctos y contesten las siguientes preguntas.

a) ¿Qué pasa si un coeficiente es igual a cero? ¿Cambia el proceso? ______

______

b) ¿En qué casos el interior de la raíz cuadrada puede ser cero? ______

2. En una escuela tienen un patio rectangular cuya diagonal es de 100 metros y el largo mide 20 metros más que el ancho. ¿Cuáles serán las medidas del patio?




a) Si llamamos $x$ al ancho, expresa el largo en términos de $x$. ________

b) Expresen el teorema de Pitágoras sustituyendo los catetos por el largo y ancho y la hipotenusa por la diagonal del patio. ________

c) Escriban la ecuación del inciso anterior sólo en términos de $x$. ________

d) Ahora lleven la misma ecuación a su forma general. ________

e) Encuentren las raíces de la ecuación aplicando la fórmula general. ¿Cuáles son? ________

f) Tomen el valor que les convenga y sustitúyelo en la ecuación que escribieron en el inciso c. ________

g) Finalmente, ¿cuáles son las medidas del patio? ________

Comparen sus resultados con los de otros compañeros. Con la ayuda de su profesor, comprueben si sus resultados son correctos, reflexionen respecto a las diferencias que encuentren y si es conveniente usar cualquiera de las dos raíces de una ecuación en la solución de un problema.

### Matemáticas con otras ciencias

Las ecuaciones de segundo grado son algunas de las funciones que más relacionan a las matemáticas con otras ciencias, debido a que forman la base de muchos procedimientos complejos que se desarrollan como apoyo a las ciencias hermanas.

Cuando se grafica una ecuación de segundo grado la curva resultante es una parábola, así que como te imaginarás, vemos ecuaciones cuadráticas por todos lados. Por ejemplo, en el campo de la reflexión de la luz y el sonido, las antenas llamadas parabólicas reciben la señal y la reflejan hacia infinidad de lugares. Se usan en el diseño de espejos reductores y amplificadores, reflectores y lámparas, antenas para señales satelitales, en el diseño de faros buscadores y telescopios, en las bóvedas dentro de las construcciones. Debido a que el sonido y la luz tienen propiedades muy parecidas en cuanto a su reflexión, las encontramos también en el diseño de micrófonos parabólicos para concentrar simultáneamente sonidos provenientes de distintos lugares.

En el campo de la cinemática o estudio del movimiento, encontramos parábolas en los disparos de proyectiles, lo que se conoce comúnmente como tiro parabólico, y estudiando los componentes de sus ecuaciones podemos conocer su altura máxima, velocidad, distancia recorrida y trayectoria.

En la arquitectura, por ejemplo, se emplean en la instalación de cables de tensión para los puentes, construcción de estructuras en forma de arco, o en general en las obras modernas con techos paraboloides, entre otras.

Como acabas de darte cuenta, las matemáticas se relacionan con muchas de las demás ciencias que nos permiten entender y aprovechar nuestro entorno.





**Eje: Forma, espacio y medida**

**Tema: Figuras y cuerpos**

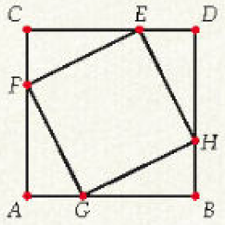
## Contenido 15

Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas.

### Lo que sé

Resuelve de manera individual los siguientes ejercicios.

1. Analiza la figura siguiente, determina cuántos triángulos se forman y cómo son entre sí. Explica tu respuesta. ________




2. Si el lado del cuadrado $CDBA$ es de 6 cm y los puntos $E$, $F$, $G$ y $H$ están a 1/3 de la distancia de los lados $CD$, $CA$, $AB$ y $BD$, respectivamente, ¿cuál es el perímetro y el área del cuadrado interior?

   a) Describe paso a paso el procedimiento que seguiste. ________

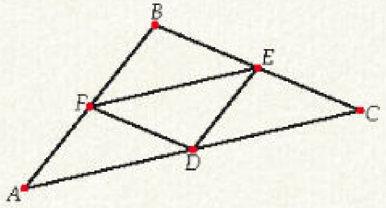
3. Dibuja en tu cuaderno un triángulo cualquiera y une con un segmento de recta los puntos medios de dos de sus lados.

   a) ¿Cómo es el segmento que une los puntos medios con respecto al lado que no toca? Explica tu respuesta. ________

4. En la siguiente figura, los puntos $D$, $E$ y $F$ son puntos medios de los lados del triángulo $ABC$.

   a) ¿Cuántos triángulos tiene la figura? ________

   b) Se dice que las rectas $FE$ y $AC$ son paralelas. Explica por qué. ________




   c) Explica cómo es el triángulo $ABC$ con respecto a los triángulos interiores. ________

5. Escribe cada uno de los *criterios de congruencia* entre triángulos y menciona un ejemplo en cada caso. ______________________________

______________________________

a) En el siguiente recuadro dibuja un ejemplo de cada criterio de congruencia entre triángulos.

6. Escribe cada uno de los *criterios de semejanza* entre triángulos y menciona un ejemplo en cada caso. ______________________________

______________________________

a) En el siguiente recuadro dibuja un ejemplo de cada criterio de semejanza entre triángulos.

7. Revisa nuevamente la figura del ejercicio 4 y explica cómo son entre sí los triángulos interiores. ______________________________

Compara tus respuestas con las de otros compañeros y analicen las características de los triángulos respecto a si son semejantes o congruentes. Con la ayuda de su profesor distingan las diferencias que existen entre los dos tipos de criterios y escriban aquí sus conclusiones. ______________________________

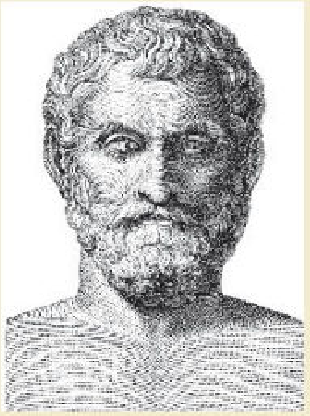
______________________________





**Saber más...**

Tales de Mileto fue un filósofo griego que vivió entre los años 611 y 545 a.n.e. No hay obras de Tales que hayan sobrevivido hasta nuestros días, se le conoce sólo por referencia de otros filósofos y matemáticos.
A Tales se le atribuyen los siguientes estudios, conocidos como teoremas:
a) Un círculo es dividido en dos partes iguales por cualquiera de sus diámetros.
b) Los ángulos de la base de un triángulo isósceles son iguales (congruentes).
c) Los ángulos que forman dos rectas que se intersecan son iguales (congruentes).
d) Dos triángulos son congruentes si tienen dos ángulos y un lado congruentes entre sí.
e) El ángulo que se forma en un semicírculo es un ángulo recto.



**TIC**

En esta ocasión te sugerimos dos páginas electrónicas en las que vas a encontrar más información relacionada con Tales de Mileto.

En la siguiente dirección encontrarás explicados algunos de los teoremas desarrollados por Tales de Mileto:

http://mimosa.pntic.mec.es/clobo/geoweb/semej2.htm (Consulta: 5 de diciembre de 2016.)

En http://enebro.pntic.mec.es/~jhep0004/Paginas/ElenManu/thales_de_mileto.htm (Consulta: 5 de diciembre de 2016) encontrarás una breve biografía de Tales, lo interesante de este documento es que fue subido a la red por dos estudiantes de bachillerato.

## Practicando lo aprendido

Realicen en parejas las actividades que se proponen a continuación.

1. Contesten si los enunciados siguientes son verdaderos o falsos y expliquen sus respuestas.

a) En un triángulo isósceles la altura trazada desde el vértice que forman los lados iguales hasta el lado opuesto, forma dos triángulos congruentes.

Verdadero ________ Falso ________

¿Por qué? ______________________________

______________________________

b) Los triángulos que se forman al trazar la diagonal en un rectángulo son congruentes.

Verdadero ________ Falso ________

¿Por qué? ______________________________

______________________________

c) Los triángulos que se forman al trazar la diagonal de un trapecio son congruentes.

Verdadero ________ Falso ________

¿Por qué? ______________________________

______________________________

2. Tales de Mileto ideó el siguiente método para encontrar, desde una playa, la distancia a la que se encontraba un barco en el mar. Sigan las instrucciones para comprobar lo que Tales de Mileto afirmó.

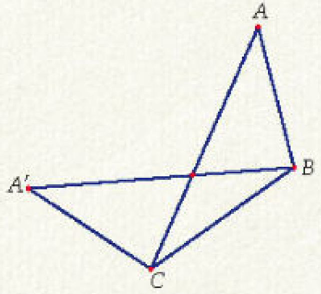
   Tracen en su cuaderno una recta paralela a la línea de la playa y tracen semirrectas que apunten hacia donde esté el barco y que partan por los extremos del segmento inicial; ahora reflejen las dos semirrectas con respecto al segmento mencionado. El punto donde se encuentren estas dos semirrectas será el punto donde está el barco.

   a) Expliquen qué características tienen los dos triángulos que se trazaron siguiendo el método de Tales? ______

   b) Expliquen qué limitantes tiene este método. ______

   c) ¿Cómo modificarían el método para que fuera realista? ______

3. En la siguiente figura se tiene que el triángulo $A'BC$ es el reflejo del triángulo $ABC$.




   a) ¿Dónde se encuentra la recta de reflexión? Expliquen su respuesta. ______

   b) Expliquen por qué es isósceles el triángulo que se forma con la intersección de $CA$ y $BA'$ y los puntos $B$ y $C$. ______

   c) ¿Cómo son entre sí los triángulos $ABC$ y $A'CB$? Expliquen su respuesta. ______

4. Ahora recordemos las características de los polígonos estudiados en cursos anteriores.

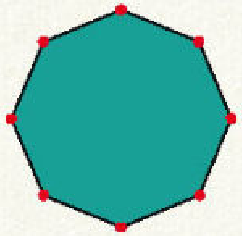
   a) ¿Cuántas diagonales tiene un polígono de 4, 6, 7 y 9 lados? Expliquen su respuesta. ______

   b) Describan con sus propias palabras el *método general* para encontrar las diagonales de un polígono de $n$ lados. ______





   c) En la figura siguiente se tiene un octágono. Tracen las diagonales a partir de uno de sus vértices.



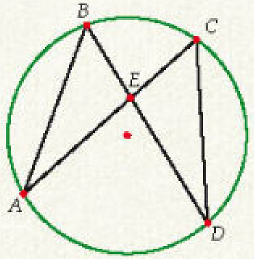
   d) ¿Cuántas diagonales trazaron? ______

   e) ¿Cuántos triángulos se forman al trazar esas diagonales? ______

   f) Encuentren las parejas de triángulos congruentes que resulten y expliquen por qué son congruentes. ______

   g) ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar la diagonal más pequeña al escoger al azar una de estas líneas? Expliquen su respuesta. ______

5. Expliquen por qué el ángulo $BEA$ es igual al ángulo $DEC$, dentro de la figura siguiente. ______



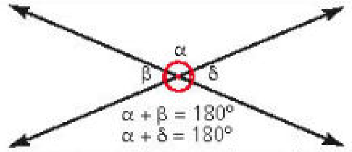

   a) ¿Cómo son los triángulos $ABE$ y $CDE$? Expliquen su respuesta. ______

Comparen sus respuestas con las de otros compañeros y reflexionen sobre las diferencias que encuentren. Con la ayuda de su profesor verifiquen que sus resultados sean correctos.

## EL RINCÓN MATEMÁTICO

Los *ángulos opuestos por el vértice* son dos ángulos que comparten un vértice y el lado de un ángulo es la extensión de un lado del otro.

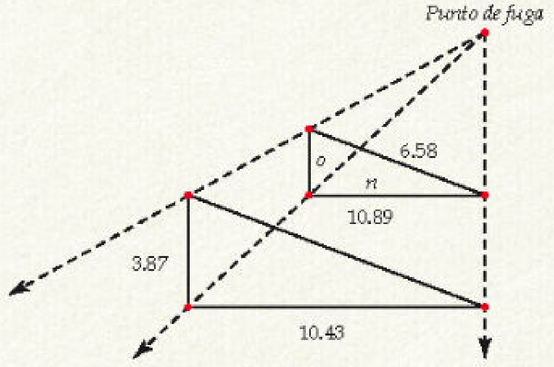
Se dice que dos ángulos opuestos por el vértice *son iguales*; en la figura se muestra la comprobación de esta afirmación.



## Saber más...

El dibujo en perspectiva se usa para representar objetos tridimensionales en un plano. En los dibujos más sencillos se utiliza un *punto de fuga*, una recta de tierra y una recta de horizonte. El punto de fuga es el punto donde convergen todas las rectas paralelas del dibujo.
En la fotografía de la derecha es fácil detectar el punto de fuga.

6. Revisen los triángulos siguientes y la ubicación del punto de fuga. Después contesten las preguntas.




   a) Expliquen por qué los triángulos de la figura son semejantes. ______

   b) Encuentren el valor de los lados $o$ y $n$. ______

   c) Expliquen el método que emplearon para llegar a ese resultado. ______

Comparen sus respuestas con las de sus compañeros y con la ayuda de su profesor reflexionen sobre las diferencias que encuentren.

## TIC

Te recomendamos visitar: https://www.thatquiz.org/es/previewtest?Z/2/B/H/1VKZ1425488167 (Consulta: 5 de diciembre de 2016), donde podrás aplicar los criterios de semejanza y congruencia de los triángulos al resolver diferentes problemas relacionados con esta temática.

En la siguiente página encontrarás una lección sobre congruencia y semejanza de los triángulos, en ella vienen algunos ejercicios que te ayudarán a entender mejor el tema.

http://lamatematics.wordpress.com/category/semejanza-y-congruencia/

(Consulta: 5 de diciembre de 2016.)

Comenta con tus compañeros acerca del conocimiento que te aportaron los contenidos de esas páginas electrónicas.

## APLICANDO LO APRENDIDO

Resuelvan los problemas y los ejercicios siguientes, en parejas. Dibujen un diagrama para que tengan una idea más clara de cada situación planteada.

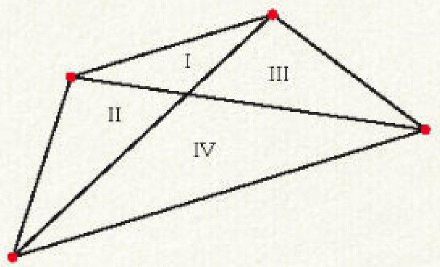




1. Dibujen en su cuaderno un triángulo isósceles y tracen su eje de simetría. Expliquen cómo son los triángulos que forma el eje en el interior del triángulo.

   a) Usen los criterios de congruencia para establecer que los triángulos II y III son congruentes. Explica cómo establecieron la congruencia. ______

2. Analicen la siguiente figura, que es un trapecio isósceles.




   a) Usen los criterios de congruencia para explicar que los triángulos II y III son congruentes. ______

   b) ¿Cómo son los triángulos I y IV? Expliquen su respuesta. ______

3. A cierta hora del día, la sombra de un árbol tiene una longitud de 4.73 metros sobre el suelo. A esa misma hora, Joaquín está parado junto al árbol y tiene una sombra de 2.25 metros. Si Joaquín tiene una estatura de 1.57 metros, ¿cuál es la altura del árbol?

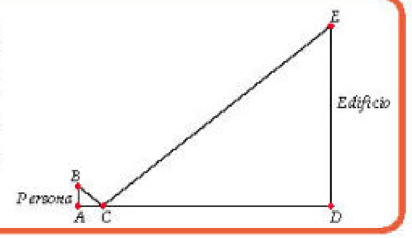
   a) Describan el procedimiento que siguieron para hallar la respuesta. ______

4. Juan Francisco Quezada y su novia Gertrudis Alatriste, por segunda ocasión, planean fugarse pues la primera fue un fracaso, ya que el padre de Gertrudis los sorprendió. Ahora Gertrudis se encuentra en un departamento más alto y la ventana está a siete metros de altura. Entre la pared del edificio y la banqueta hay, a dos metros de distancia, una barda de 2.5 metros de altura. Juan Francisco sabe que debe poner la escalera sobre la banqueta y casi en el borde, a 1.5 metros de la barda. La escalera del enamorado tiene 7.25 metros de longitud. ¿Puede recargar la escalera en el alféizar de la ventana sin que le estorbe la barda? ______

   a) Expliquen detalladamente el razonamiento que siguieron para responder la pregunta. ______

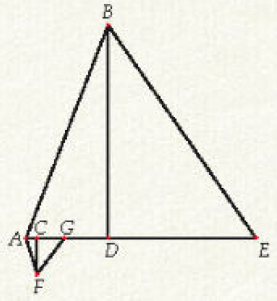
## EL RINCÓN MATEMÁTICO

Un método para estimar la altura de un edificio consiste en poner un espejo en el suelo. Si te colocas a cierta distancia del espejo de modo que puedas ver la altura del edificio, el segmento de recta que une tus ojos con el espejo, y el segmento que une el espejo con la parte superior del edificio forman dos triángulos congruentes, como se muestra en la figura.



5. En el método de Tales, para encontrar la distancia a la que se halla un barco de la playa, se requiere construir un triángulo cuya altura tenga la longitud a la que se encuentra el barco. Si la nave está a 10 km de la playa, se necesitaría un triángulo de 10 km de altura. Esto hace que el método sea poco práctico.
Si en vez de construir un triángulo congruente con el triángulo que forma el barco y el segmento que se traza en la playa, se traza uno semejante, el método podría funcionar mejor. Expliquen cómo podrían usar este método con triángulos semejantes.

6. Observen la figura siguiente y comprueban las afirmaciones que hacemos sobre la misma.




$AF$ es paralelo a $BE$ y $GF$ es paralelo a $BA$.

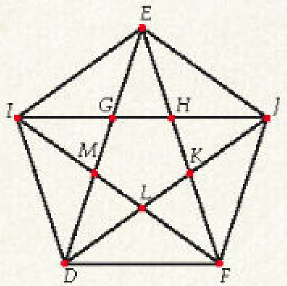
$AC = 0.90$ m, $AD = 5.39$ m, y $CF = 2.57$ m.

a) Explica por qué los triángulos $AFG$ y $AEB$ son semejantes.

b) ¿Cuál es la longitud de la altura del triángulo $AEB$?

7. Un *triángulo dorado* se define como un triángulo isósceles en el cual el ángulo que forman los lados iguales mide la mitad de lo que miden los otros dos ángulos.

Consideren el pentágono regular de la figura.




a) ¿Cuántos triángulos dorados se forman con las diagonales?

b) Expliquen cómo es el triángulo $IFJ$ con respecto al triángulo $MIG$.

c) ¿Cuánto mide cada uno de todos los ángulos que se forman dentro del pentágono?

d) ¿Cómo son los triángulos $EHJ$ y $IMD$ entre sí? Expliquen su respuesta.

e) ¿Cómo son entre sí los pentágonos $EIDFJ$ y $GHKLM$? Expliquen su respuesta.

8. Respondan si la siguiente afirmación es verdadera o falsa y por qué.

*Dos polígonos regulares del mismo número de lados y diferente tamaño siempre son semejantes.*

Comparen sus respuestas con las de otras parejas y con la ayuda de su profesor comprueben que sus resultados sean correctos.





**Eje: Forma, espacio y medida**

**Tema: Figuras y cuerpos**

## Contenido 16

Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales.

### Lo que sé

Para cada uno de los ejercicios y las actividades de esta sección traza en tu cuaderno las figuras geométricas que se mencionan, y con base en éstas explica tus respuestas.

1. Explica cómo son los triángulos que se forman cuando trazamos una línea paralela a cualquiera de sus lados.
2. Una cometa es un cuadrilátero que se forma al reflejar dos lados de un triángulo cualquiera. Explica cómo son entre sí las diagonales de la cometa.
3. En una cometa cada diagonal forma dos triángulos. ¿Éstos son congruentes o semejantes? Explica tu respuesta.
4. ¿Una cometa es un paralelogramo? ______ ¿Por qué?
5. Traza en el siguiente recuadro un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 2 y 4 cm; después traza una línea paralela a la hipotenusa a una distancia de 2 cm de ésta y que quede fuera del triángulo. A partir de la paralela, traza un triángulo congruente al primer triángulo cuyos catetos midan 1 y 2 cm respectivamente.

Compara tus resultados con los de otros compañeros y con la ayuda de tu profesor reflexionen sobre la construcción de triángulos congruentes usando paralelas.

### EL RINCÓN MATEMÁTICO

El siguiente procedimiento sirve para construir un polígono regular a partir de su círculo circunscrito.

- Dibuja un círculo y traza en él su diámetro.
- Divide el diámetro en el número de lados que quieres que tenga tu polígono.
- Con el compás, traza un círculo con centro en el extremo del diámetro y el radio en el otro extremo.
- Traza otro círculo congruente con el anterior, pero esta vez invierte el centro y el radio.
- De una de las intersecciones de estos dos círculos, traza un rayo o semirrecta que pase por el segundo punto de división del diámetro.
- Marca la intersección de este rayo con el círculo original.

**Libroteca**

Te recomendamos leer el libro: Hernández Garciadiego, Carlos, *Geometría del deporte*, México, Santillana, 2002.

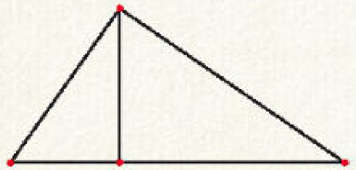
- Con el compás mide la distancia entre este punto de intersección y el extremo más cercano del diámetro (esta distancia será la medida del lado del polígono).
- Marca la distancia sobre el círculo inicial hasta completarlo.
- Finalmente, une los puntos que trazaste en el paso anterior con segmentos de recta y tendrás tu polígono.

Sigue el procedimiento para construir un pentágono, un hexágono, un octágono y un eneágono.

## PRACTICANDO LO APRENDIDO

Resuelve los problemas siguientes y realiza las actividades junto con otro compañero.

1. En la siguiente figura tenemos un triángulo rectángulo en el que trazamos la altura, que parte de su ángulo recto.

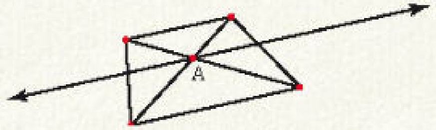


   a) Expliquen por qué los dos triángulos que se forman son semejantes. ______

2. Si tenemos dos triángulos rectángulos semejantes, ¿sus áreas son semejantes también? Expliquen por qué. ______

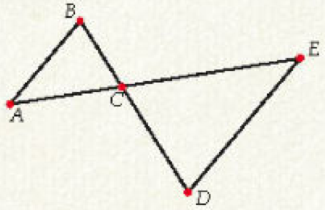
3. Si tenemos dos triángulos rectángulos semejantes, ¿sus perímetros son semejantes también? Expliquen por qué. ______

4. La siguiente figura es un trapecio dividido por una recta paralela a sus bases que pasa por la intersección de sus diagonales.




   a) Completen este enunciado: si en un trapecio se traza una recta paralela a sus bases que pase por el punto de intersección de sus diagonales, entonces ésta cortará a los otros lados del trapecio en ______

5. En la siguiente figura tenemos que $AB$ es paralela a $DE$.




   a) ¿Cómo son los dos triángulos respecto a su relación de semejanza o congruencia? Escriban su respuesta en la forma "si..., entonces...". ______

6. Si $AC$ mide 2.2 cm, $CE$ mide 5 cm y $AB$ mide 2.5 cm, encuentren la medida de los lados que faltan. ______

7. En su cuaderno tracen tres triángulos escalenos. En cada triángulo tracen una de sus **bisectrices**. ¿Cómo es la razón entre la longitud de esas dos partes con respecto a la razón entre la longitud de los otros dos lados? ______

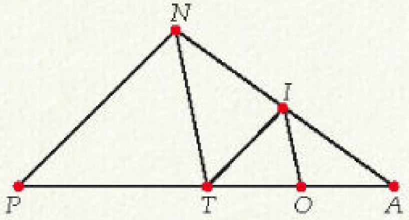
**Glosario**

**Bisectriz**. La bisectriz de un ángulo es la línea que pasa por el vértice del ángulo y lo divide en dos partes iguales.





8. En la figura tenemos que los triángulos $PAN$ y $TIA$ son semejantes. $T$ es punto medio de $PA$ y $O$ es el punto medio de $TA$.




   a) Si $PN = 7.56$ cm, $NT = 5.42$ cm e $IT = 3.78$ cm, encuentren la longitud de $IO$. ______

Comparen sus resultados con los de otros compañeros y con la ayuda del profesor comprueben si son correctos.

**Saber más...**

En realidad poco se sabe de la vida de Euclides, sólo que vivió más o menos entre los años 325 y 265 antes de nuestra época y enseñó en Alejandría, por eso se le conoce como *Euclides de Alejandría*. De su obra sobrevive *Los elementos*, que es un tratado de geometría bastante extenso. En este tratado, los libros V y VI, entre otras cosas, tratan sobre las proporciones y la semejanza. Como dato curioso, *Los elementos*, de Euclides, es el libro más leído y comentado, después de la Biblia y *El Quijote*, de Miguel de Cervantes Saavedra.

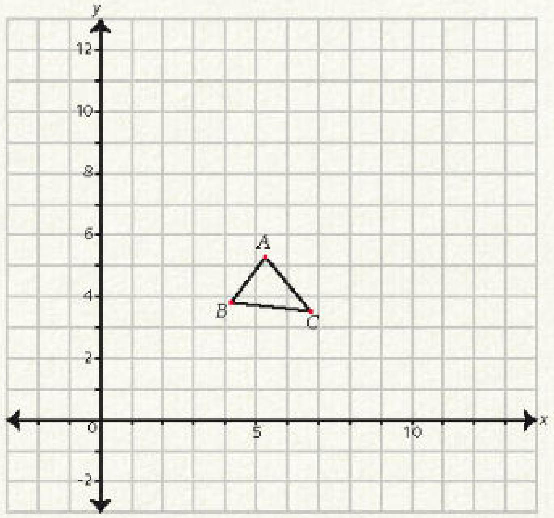
**TIC**

Si te interesa saber más sobre la semejanza en los triángulos, recomendamos que visites la página disponible en: http://math.kendallhunt.com/documents/dg3/condensedlessonplansspanish/dg_clps_11.pdf (Consulta: 5 de diciembre de 2016.)

## APLICANDO LO APRENDIDO

Resuelvan los problemas siguientes en parejas.

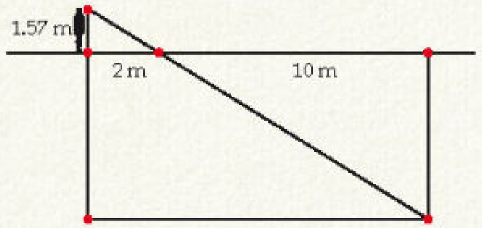
1. En la gráfica tenemos el triángulo $ABC$ cuyos vértices están en los puntos (5.29, 5.29), (4.20, 3.81) y (6.74, 3.53).




   a) Multipliquen cada una de las coordenadas de los vértices por 1.5 y grafiquen los nuevos puntos. ¿Cómo son los triángulos $ABC$ y el nuevo? Expliquen su respuesta. ______

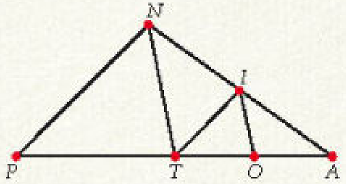
   b) Multipliquen cada una de las coordenadas del triángulo $ABC$ por 0.5 y grafiquen los nuevos puntos. ¿Cómo son los triángulos $ABC$ y el nuevo? ______

2. Sonia mide 1.57 m y está parada en un extremo de un puente de 12 m de largo. Desde su posición mira el extremo inferior del puente que está del otro lado y estima que su línea de visión cruza al puente a una distancia de 2 m, como se muestra en la figura.



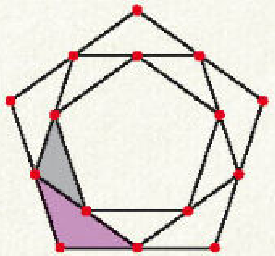

   a) ¿Cuál es la altura del puente? Justifiquen su respuesta. ________

3. En el ejercicio 8 de la sección "Practicando lo aprendido", en la página anterior se tiene la siguiente figura.



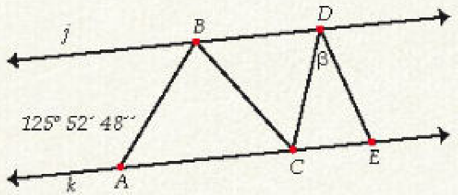

   a) Se dice que los triángulos $PAN$ y $TIA$ son semejantes. ¿Cuál es la condición para que esto se cumpla? ________

4. En la figura adjunta, tenemos un pentágono dentro del cual se trazó otro pentágono a partir de los puntos medios de sus lados e hicimos lo mismo con el segundo pentágono.



   a) ¿Cómo son entre sí los triángulos de colores? Justifiquen su respuesta. ________

5. En la siguiente figura tenemos que $j$ y $k$ son paralelas entre sí y que los tres triángulos son isósceles.




   a) Encuentren el valor del ángulo β. Expliquen su respuesta. ________

## EL RINCÓN MATEMÁTICO

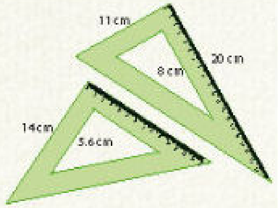
Al igual que el tiempo, que se mide en horas, minutos y segundos, los ángulos se miden en grados, minutos y segundos. La equivalencia es la misma: 1° = 60′, 1′ = 60″.

Ambos son sistemas de numeración sexagesimales.





6. En la figura tenemos un juego de escuadras de 14 y 20 cm. La escuadra de 14 cm es una escuadra de 45° y la de 20 cm es una escuadra de 30°.

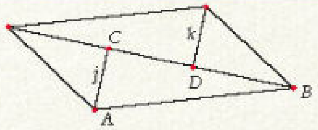



   a) Para cada escuadra, demuestren que el triángulo interno es semejante al que forma el perímetro de la escuadra. ________

   b) Para cada escuadra el triángulo del perímetro y el triángulo interno pueden considerarse como un dibujo en perspectiva, cuyos lados convergen en un punto de fuga. Expliquen dónde se encuentra ese punto. ________

   c) Encuentren la medida de los lados que faltan en los dos triángulos, según la figura. ________

7. En la figura siguiente tenemos un paralelogramo. Los segmentos de recta $j$ y $k$ son las alturas de los triángulos formados al trazar la diagonal. Si $j$ = 4.05 cm y el lado $AB$ mide 12.91 cm.



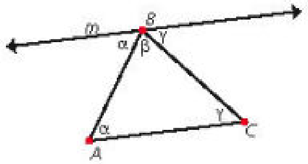

   a) Encuentren la distancia entre los puntos $C$ y $D$ y expliquen el procedimiento que siguieron para responder la pregunta. ________

Comparen sus resultados con los de otros compañeros y reflexionen sobre las diferencias que encuentren. Con la ayuda de su profesor comprueben que sus respuestas sean correctas.

## EL RINCÓN MATEMÁTICO

Un hecho matemático conocido desde hace mucho tiempo es que la suma de los ángulos internos de un triángulo cualquiera es 180°. Este resultado fue una *conjetura* hasta que se obtuvo su *demostración*. Ahora se le considera como *teorema*.

A continuación te presentamos su demostración, en una estructura de dos columnas (la figura nos sirve de referencia).




| Hechos | Justificación teórica |
|---|---|
| Triángulo $ABC$. | Esto es algo dado, con lo que empezamos. |
| Trazamos la recta auxiliar $m$, paralela al lado $AC$ que pasa por $B$. | Necesaria para utilizar dos rectas paralelas cortadas por una transversal. |
| Tomamos el lado $AB$ como la transversal que corta a las paralelas $m$ y $AC$, y colocamos la medida del ángulo α en el lugar de su pareja alterna interna. | Si tenemos dos rectas paralelas cortadas por una transversal, los ángulos alternos internos son congruentes. |
| Tomamos el lado $CB$ como la transversal que corta a las paralelas $m$ y $AC$, y colocamos la medida del ángulo g en el lugar de su pareja alterna interna. | Si tenemos dos rectas paralelas cortadas por una transversal, los ángulos alternos internos son congruentes. |
| La recta $m$ y los segmentos $AB$ y $CB$ forman juntos un ángulo llano. | Definición de ángulo llano como aquel que mide 180°. |
| a + b + g = 180°. | Resultado demostrado. |

## Practicando lo aprendido

1. Usa una estructura de dos columnas, como la que se presenta en el "Rincón matemático", de la página anterior, y justifica en tu cuaderno el procedimiento que siguieron para desarrollar las actividades 3 y 4 de la sección "Practicando lo aprendido".

**TIC**

Visita la página electrónica http://ntic.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2001/dibujotecnico/Construcciones%20de%20dibujo%20tecnico/msp_pigl.htm (Consulta: 5 de diciembre de 2016), en la que se muestra la manera de construir polígonos a partir de uno de sus lados. Comenta con tus compañeros qué diferencia hay entre este método y el que te presentamos anteriormente.

**Saber más...**

En arquitectura e ingeniería se utilizan planos que sirven para representar las construcciones que se van a realizar, pero como si fueran vistas desde arriba. Los planos no pueden ser trazados en tamaño real, pues sería poco práctico, más bien son hechos con figuras semejantes a la original. En este caso se dice que se trata de una *representación a escala*. Para hacer las representaciones a escala se utilizan escalímetros como los que tú has usado seguramente en este curso.
Por ejemplo, 1:25 es el factor de escala y significa que cada centímetro de la escala representa 25 cm del original.

2. Dibuja en tu cuaderno un pentágono, un hexágono, un heptágono, un octágono y un eneágono, siguiendo el procedimiento que se presenta en una de las secciones "Rincón matemático", de esta lección.
   a) ¿Son polígonos regulares o irregulares? ______
   ¿Por qué? ______

3. Por el plano de un departamento se sabe que hay una pared con una ventana de 4.5 m de largo, pero en el papel, la ventana mide 1.5 cm. ¿Cuál es el factor de escala?
______
   a) Describe el procedimiento que seguiste para llegar a la solución. ______

Compara tus resultados con los de otros compañeros y con la ayuda de su profesor reflexionen respecto a las diferencias que encuentren.





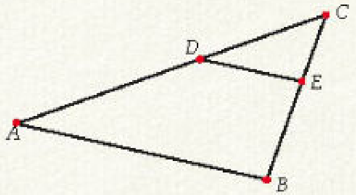
**Eje: Forma, espacio y medida**
**Tema: Figuras y cuerpos**

## Contenido 17

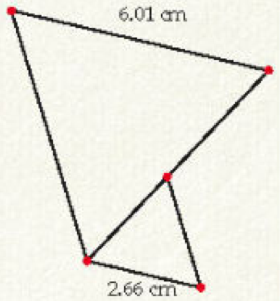
Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas.

## Lo que sé

Resuelve los problemas de esta sección de manera individual.



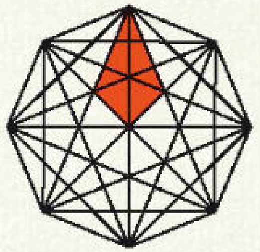

1. Considera la siguiente figura.
   a) ¿Cuál es la condición para que los triángulos $ABC$ y $CDE$ sean semejantes? ______
   b) Si $DA$ = 8.72 cm, $CE$ = 3.18 y $CD$ = 5.92, encuentra la longitud del lado $CB$. ______
   c) Describe detalladamente el procedimiento que seguiste. ______




2. Ahora tenemos los dos triángulos equiláteros siguientes.
   a) Calcula el cociente de sus áreas. ______
   b) Escribe paso a paso el procedimiento que seguiste. ______
   c) Explica cómo es la razón entre sus áreas con respecto a la razón de proporcionalidad de los dos triángulos. ______

3. En esta figura presentamos un octágono con todas sus diagonales trazadas.
   a) ¿Qué tipo de cuadrilátero es el que se muestra en color? ______

b) Ahora encuentra un cuadrilátero semejante al coloreado y explica detalladamente por qué son semejantes. ______



Compara tus respuestas con las de otros compañeros y con la ayuda de su profesor reflexionen acerca de las diferencias que encuentren.

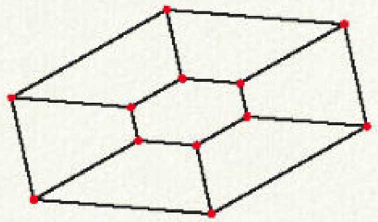
**Saber más...**

Un *pantógrafo* es un dispositivo mecánico que se utiliza para reproducir dibujos a escala, mayores o menores que el original.
La disposición de las regletas permite que al seguir las líneas de la imagen original al mismo tiempo se dibuje otra más grande o más pequeña, según se requiera.
La invención de este aparato se atribuye a Christopher Scheiner (1573-1650), un sacerdote jesuita que vivió en lo que hoy es el sur de Alemania. Scheiner fue maestro de Física, Matemáticas y Astronomía.

## Practicando lo aprendido

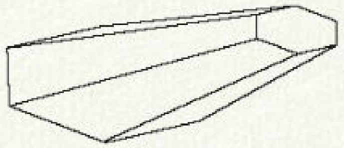
Resuelvan en parejas los siguientes problemas y actividades.

1. En la figura tenemos la representación en perspectiva de una pirámide truncada, vista desde arriba.



   a) Localicen y marquen el punto de fuga.
   b) Expliquen cómo son entre sí los hexágonos. ______
   c) ¿Qué tipo de cuadriláteros se forman en las caras laterales de la pirámide? ______
   d) Expliquen si son congruentes entre sí. ______

2. En la siguiente figura se tiene la misma pirámide del ejercicio anterior, pero ahora vista desde otra ubicación.
   a) Encuentren y marquen el punto de fuga.
   b) ¿Cómo son entre sí los hexágonos de la base? Expliquen su respuesta. ______

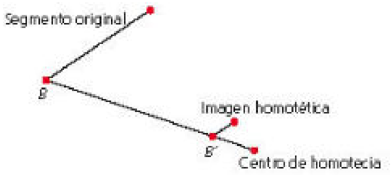






## EL RINCÓN MATEMÁTICO

La *homotecia* es una transformación que cambia el tamaño y la ubicación de las figuras. La homotecia transforma un punto *B* en el punto *B'*, de modo que *B* y *B'* están alineados con un tercer punto llamado *centro de homotecia*. El *factor de escala* o razón de homotecia, determina qué tan lejos o cerca están los puntos de la imagen con respecto al original. Observen la figura siguiente.

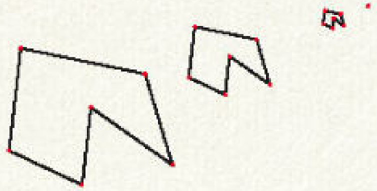



Tenemos un segmento y su imagen homotética, en este caso decimos que se trata de una homotecia $P\left(\frac{1}{5}\right)$, esto quiere decir que el centro de homotecia es el punto *P* y que la distancia entre *P* y *B'* es un quinto de la distancia entre *P* y *B*; por lo tanto, el factor de escala es $\frac{1}{5}$.

3. A continuación presentamos una foto del volcán Popocatépetl y su imagen homotética.

   a) Determinen el centro de homotecia y su factor de escala. ______
   b) ¿Cuál de las dos fotos es la original y cuál es la imagen homotética? ______
   c) Justifiquen su respuesta anterior. ______
   d) ¿Podemos decir que los volcanes de las dos fotografías son semejantes? Expliquen por qué. ______

4. En la siguiente figura, el hexágono de en medio es la figura original y las otras dos son sus imágenes homotéticas.



   a) Encuentren el factor de escala de cada imagen. ______
   b) ¿Qué efecto tiene el factor de escala en las imágenes del hexágono? ______
   c) Expliquen por qué los tres hexágonos son semejantes. ______

5. Completen las siguientes afirmaciones usando "Si..., entonces...".
   a) Si en una homotecia el factor de escala es menor que uno, entonces la imagen resultante es ______.
   b) Si en una homotecia el factor de escala es ______, entonces la imagen es más grande.
   c) Si en una homotecia el factor de escala es negativo, entonces sucede que ______

## EL RINCÓN MATEMÁTICO

Si en una homotecia la imagen es mayor que la figura original, entonces decimos que se trata de una *dilatación*; por el contrario, si la imagen es menor que el original, entonces se trata de una *contracción*.

**Saber más...**

En Física se estudia cómo cambian de tamaño ciertos materiales, dependiendo de la temperatura ambiente. A mayor temperatura mayor volumen (dilatación), y a menor temperatura menor volumen (contracción).

Si el material con el que está fabricado un objeto tiene una densidad uniforme, entonces la dilatación o la contracción será uniforme en todas las dimensiones del objeto.

Una aplicación de este principio físico es la fabricación de termómetros, cuando la punta de metal del termómetro entra en contacto con un cuerpo más caliente, el aumento de temperatura hace que el mercurio del interior se dilate y suba por el conducto, indicando el aumento de temperatura.

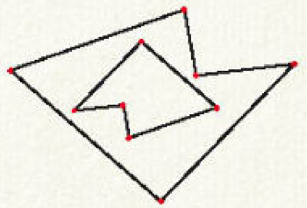
6. Consideren que un cubo de metal se dilata en sus tres dimensiones al ser sometido a calor muy intenso. Expliquen dónde se ubica el centro de homotecia. ______

7. Dibujen en el siguiente recuadro un triángulo cualquiera y un punto fuera de éste. Encuentren la imagen homotética del mismo, con centro en el punto y razón de homotecia de 1.3.





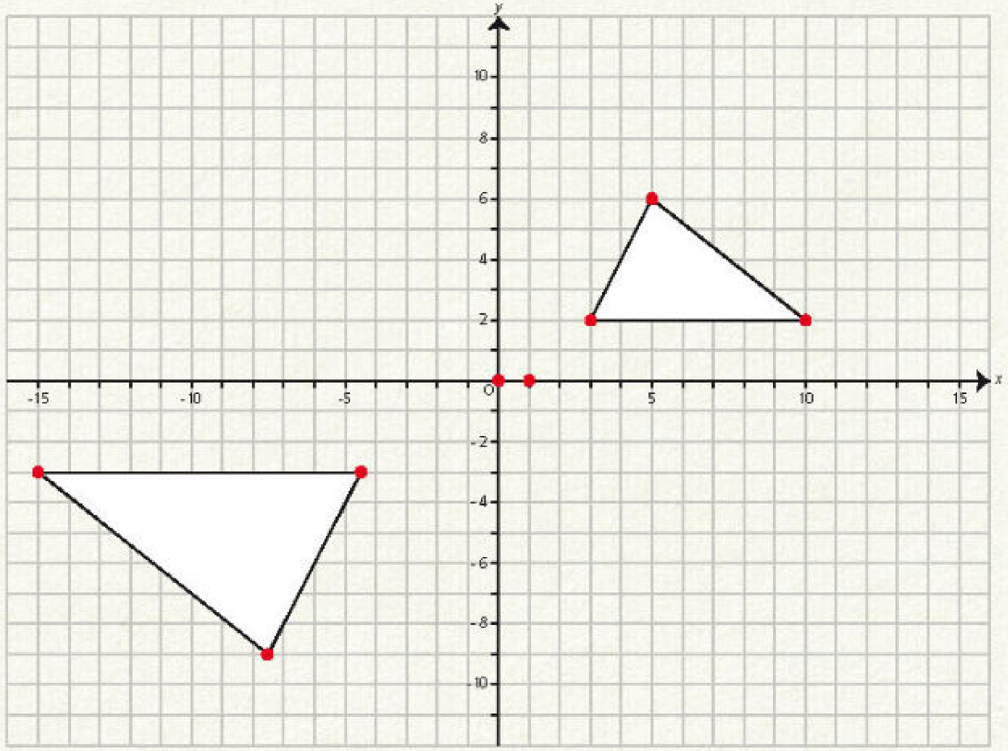
8. Ahora presentamos la imagen siguiente. Contesten las siguientes preguntas.



a) ¿Los polígonos de la figura son homotéticos? Justifiquen su respuesta. ______

b) En caso de que la respuesta sea afirmativa, determinen el factor de escala. ______

9. Analicen la siguiente gráfica en la que se encuentran un triángulo y su imagen homotética y encuentren la razón de homotecia.



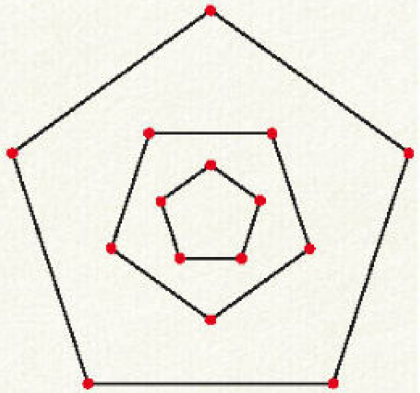

a) ¿Cómo se encuentran las coordenadas de los vértices del triángulo menor a partir del mayor? ______

Comparen sus resultados con los de otros compañeros y reflexionen sobre las diferencias que encuentren. Con la ayuda de su profesor comprueben si sus respuestas son correctas.

## APLICANDO LO APRENDIDO

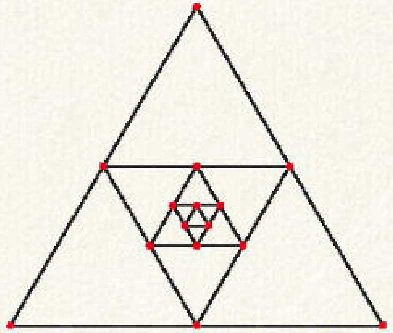
Realiza las siguientes actividades de manera individual.

1. En la siguiente figura, los dos pentágonos internos son imágenes homotéticas del mayor con respecto al centro de los pentágonos.
   a) Encuentra el factor de escala que produce el polígono de tamaño intermedio. ______
   b) Encuentra el factor de escala que da como resultado el pentágono más pequeño. ______
   c) ¿Cuál sería el factor de escala que tendría al pentágono exterior como imagen del más pequeño? ______
   d) Si el mayor de los pentágonos homotéticos tiene lados de 9.87 cm de longitud y el menor de 2.47 cm, encuentra el área del pentágono intermedio.



2. Explica si es una figura homotética la resultante de reproducir una imagen con un pantógrafo. ______

3. En la figura que presentamos a continuación tenemos que cada triángulo se construyó a partir de los puntos medios del anterior, empezando por el más pequeño. Los triángulos son equiláteros.
   a) Considera al triángulo del centro como el original. Describe cada triángulo como una transformación homotética del primero y en cada descripción indica el factor de escala.



4. Si el triángulo más pequeño del ejercicio anterior mide por cada lado medio centímetro, calcula el área del triángulo mayor describiendo el procedimiento que seguiste. ______

Compara tus resultados con los de otros compañeros y con la ayuda de tu profesor comprueba si son correctas tus respuestas.





**EJE: MANEJO DE LA INFORMACIÓN**

**TEMA: PROPORCIONALIDAD Y FUNCIONES**

## Contenido 18

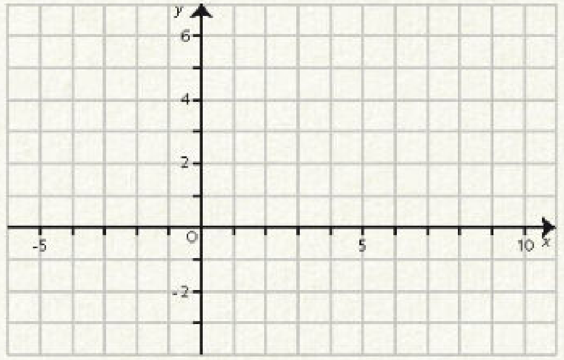
Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos.

## LO QUE SÉ

1. Localiza los siguientes pares ordenados en el plano.

   $A(4, 7)$, $B(4, 4)$, $C(6, 4)$, $D(4, 2)$, $E(4, -1)$, $F(1.5, 1.5)$, $G(-2, 0)$, $H(0.5, 2.5)$, $I(-2, 4)$, $J(2, 4)$

   a) ¿Todos los puntos se encuentran en el mismo cuadrante? ______
   b) ¿Qué figura forman si los unes? ______




2. Escribe las coordenadas de tres puntos de los graficados en el ejercicio anterior, que se encuentren sobre una misma línea (**colineales**). ______
   a) ¿Observas puntos que se encuentren sobre una misma línea horizontal? Escribe sus coordenadas. ______
   b) ¿Qué tienen en común? ______
   c) ¿Observas puntos que se encuentren sobre una misma línea vertical? Escribe sus coordenadas. ______
   d) ¿Qué tienen en común? ______

3. Se quiere graficar la ecuación $y = x^2 - 7x + 10$. Para lograrlo, seguiremos el método de tabulación, es decir, sustituir valores en $x$ para encontrar el valor de $y$.
   a) Completa la siguiente tabla.

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | |
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| 6 | |

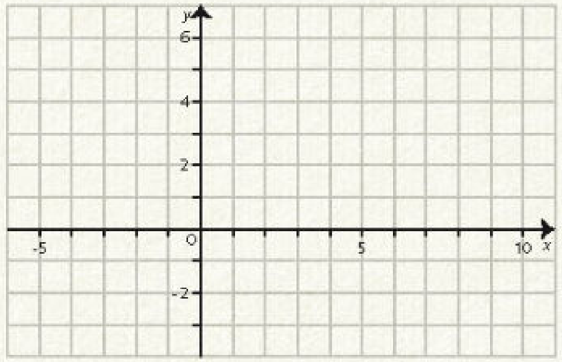
   b) Grafica en el siguiente plano los valores de la tabla y únelos con una curva.

**Glosario**

**Puntos colineales.** Este concepto se emplea en geometría para denominar a los puntos que se ubican en la misma recta.

c) ¿Cómo se llama esta curva?

Compara tus resultados con los de otros compañeros y con la ayuda de su profesor reflexionen sobre las diferencias que encuentren.



## PRACTICANDO LO APRENDIDO

Reúnanse en equipos para trabajar en los siguientes problemas.

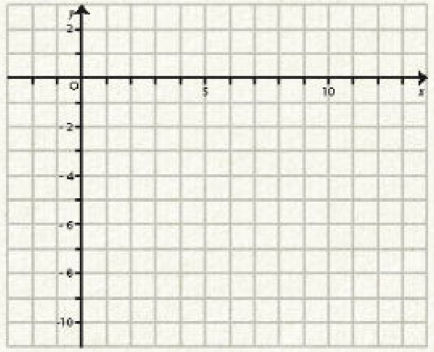
1. Se quiere graficar la función $y = x^2 - 14x + 45$. Para lograr hacerlo, realicen las actividades que a continuación presentamos.

   a) ¿Cuáles son las raíces de la función?

   b) Completen la tabla resolviendo la ecuación con todos los valores de $x$ que se encuentren entre sus dos raíces.

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |

   c) Grafiquen la ecuación en el siguiente plano y unan con una curva los puntos, para que vean la forma de la función.



   d) ¿Esta función tiene un valor máximo o un mínimo? ¿Cuáles son las coordenadas de este punto?

## EL RINCÓN MATEMÁTICO

Una función es *creciente* cuando aumenta $x$ y también aumenta $y$. Una función es *decreciente* si $x$ aumenta y disminuye $y$. Al punto en el que la función decreciente cambia a creciente se conoce como *mínimo relativo*, y si observamos los puntos cercanos a éste, son valores mayores que él. En cambio, si la función creciente cambia a decreciente, ahí tiene un punto *máximo relativo*, y si observamos los puntos cercanos a éste, todos corresponden a valores menores que él.
Los puntos mínimos y máximos relativos se conocen como *puntos críticos*. El valor de la función en un punto crítico se conoce como *valor extremo*.



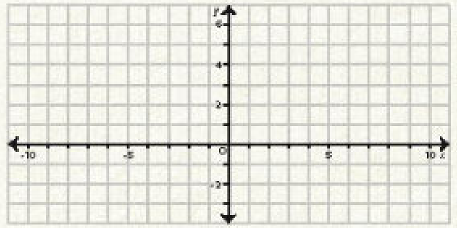


2. Una compañía está haciendo un análisis de las ganancias que ha obtenido en sus primeros cinco años, los cuales se muestran en la siguiente tabla.

| Año | Ganancia (en millones de pesos) |
|---|---|
| 1 | 3 |
| 2 | 5 |
| 3 | 6 |
| 4 | 4 |
| 5 | 2 |

   a) Grafiquen estos puntos y dibujen la curva correspondiente a la función de ganancias con respecto al año.

   b) ¿Cuáles son las raíces de esta función? Observen la gráfica y encuentren los valores aproximados.



   c) ¿Qué significan estos puntos para la compañía?

   d) ¿Cuáles son las coordenadas aproximadas del punto crítico?

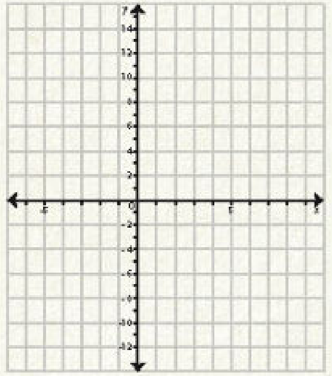
   e) ¿Qué significa este punto para la compañía?

3. Grafiquen las siguientes funciones, en el mismo plano.

   $y = x^2 - x - 6$ $\qquad$ $y = -2x^2 + 2x + 12$

   a) ¿Qué tienen en común las gráficas de las dos funciones?

   b) ¿Qué diferencias encuentran en las dos gráficas?

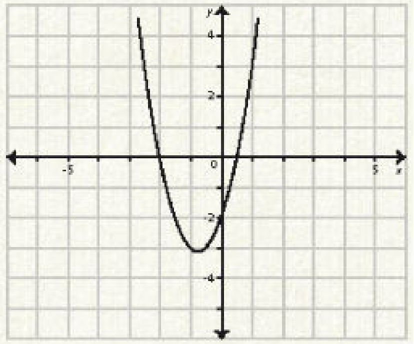


4. La siguiente gráfica corresponde a una función cuadrática.

   a) ¿Cuáles son las raíces de la función?

   b) ¿Cuáles son los binomios que se forman con esas raíces?

   c) Realicen el producto de los binomios y escriban la función resultante en la forma $y = ax^2 + bx + c$.



5. Tenemos la ecuación $y = x^2 - 1$. Realicen las siguientes actividades para que al final tracen la gráfica correspondiente.

a) Llenen la siguiente tabla con valores para $x$ entre $-3$ y 3.

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |

b) Factoricen la ecuación y exprésenla como producto de binomios. ______

c) ¿Cuáles son las raíces de la ecuación? ______

d) Tracen un plano cartesiano en el siguiente recuadro, localicen los pares ordenados de la tabla y unan los puntos para que conozcan la curva que se forma.

e) ¿En qué puntos la variable $y$ vale cero? ______

f) ¿En qué punto la gráfica cambia de decreciente a creciente y viceversa? ______

g) Escriban las coordenadas de los puntos críticos. ______

Comparen sus resultados con los de otros compañeros y con la ayuda de su profesor, comprueben que sus respuestas sean correctas.





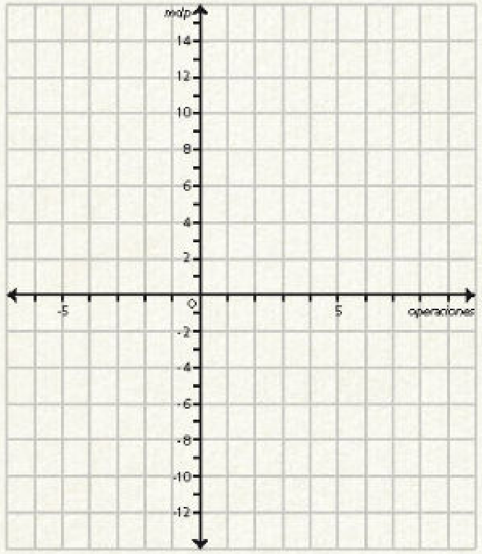
## Aplicando lo aprendido

Resuelvan en equipo las siguientes actividades.

1. Un corredor de bolsa está haciendo un recuento de las operaciones económicas que realizó el año pasado por mes, para lo cual vació su información en la siguiente tabla. En la columna "Número de operaciones", los números negativos indican el número de operaciones que le hicieron perder dinero, y los positivos, cuando ganó; y la columna "Cantidad" indica la cantidad en millones de pesos (mdp) que ganó o perdió.

| Número de operaciones | Cantidad (mdp) |
|---|---|
| -5 | 9 |
| -3 | 5 |
| -1 | 1 |
| 1 | 1 |
| 3 | 5 |
| 6 | 7 |
| 8 | 9 |
| 9 | 11 |

a) Grafiquen los pares ordenados de la tabla. Modifiquen la escala si es necesario.




b) ¿Cuáles son, aproximadamente, los valores de las raíces? ______

c) ¿Cuál es la expresión algebraica para esa función? ______

d) Encuentren el valor máximo o mínimo de la función y compárenlo con lo que se ve en la gráfica. ______

e) ¿Qué significa el punto que acaban de encontrar? ¿Qué nos indica para la situación planteada? ______

______

**Saber más...**

Existen múltiples investigaciones que tratan de inversiones a corto, mediano y largo plazo, así como de sus beneficios, en particular, estudios realizados por el Centro de Investigación para el Desarrollo A. C., indican que en México un profesionista gana alrededor del 75 % más que una persona con estudios de preparatoria.

FUENTE: Estrada, R., *Profesionista en vilo. ¿Es la universidad una buena inversión?*, México, CIDAC, 2011.

Eje: Manejo de la información

Tema: Proporcionalidad y funciones

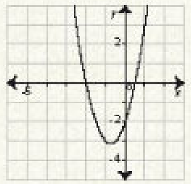
## Contenido 19

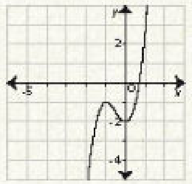
Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera.

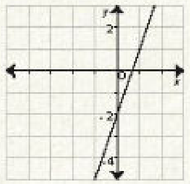
### Lo que sé

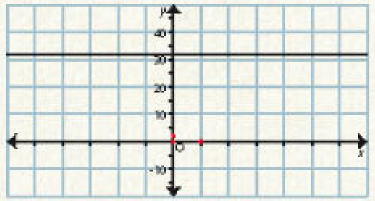
Realicen las siguientes actividades en parejas.

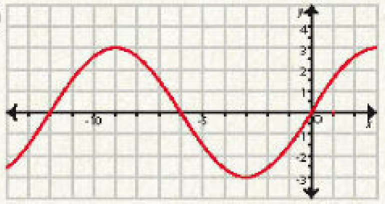
1. Analicen las siguientes gráficas y expliquen cuál de ellas representa una función lineal y cómo la identifican. ______

a) 

b) 

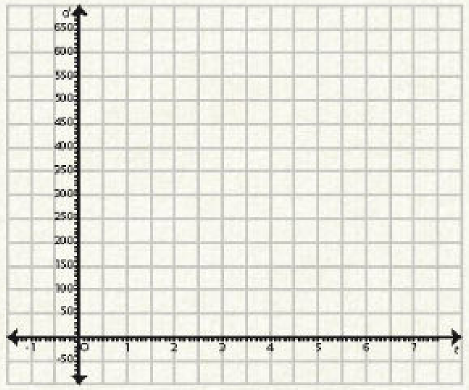
c) 

d) 

e) 

2. Expliquen cuáles de las gráficas anteriores son ecuaciones cuadráticas y cómo las identifican. ______

3. Dos trenes salen a la misma hora de la misma estación, pero uno viaja hacia el este y otro al oeste. El primero lleva una velocidad de 65 km por hora, mientras que el segundo viaja a 85 km por hora.



a) Grafiquen la distancia entre ellos, en relación con el tiempo de recorrido, en el siguiente plano.

b) ¿Cuál es la velocidad en el instante en que el tren está en la estación? ______





c) ¿Cambian instantáneamente la velocidad de 0 km por hora a los 65 km u 85 km por hora respectivamente? ______

d) Expliquen si necesitan la expresión algebraica para hacer la gráfica. ______

4. Consideren ahora que los dos trenes del ejercicio anterior van hacia el oeste.

a) Sin hacer la gráfica de la nueva situación de los trenes, expliquen en qué coinciden la gráfica anterior y la nueva. ______

b) Ahora expliquen cuál es la diferencia con la nueva gráfica. ______

c) Elaboren la segunda gráfica en el mismo plano y expliquen si sucedió lo que pensaban. ______

Comparen sus resultados con los de otros compañeros y con la ayuda de su profesor comprueben que sus respuestas son correctas.

### El rincón matemático

La función llamada *valor absoluto* corresponde al valor del número sin tomar en cuenta el signo (positivo o negativo), y es de gran utilidad para variables que corresponden a medidas de longitud que nunca tomarán valores negativos, por ejemplo, el valor absoluto de 4 se escribe $|4| = 4$, y el de $-4$ se escribe $|-4| = 4$. Así, para las $x$ positivas el valor de $x$ se conserva, mientras que para las $x$ negativas se volverán positivas.

De esta manera, la *función valor absoluto* se define como:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

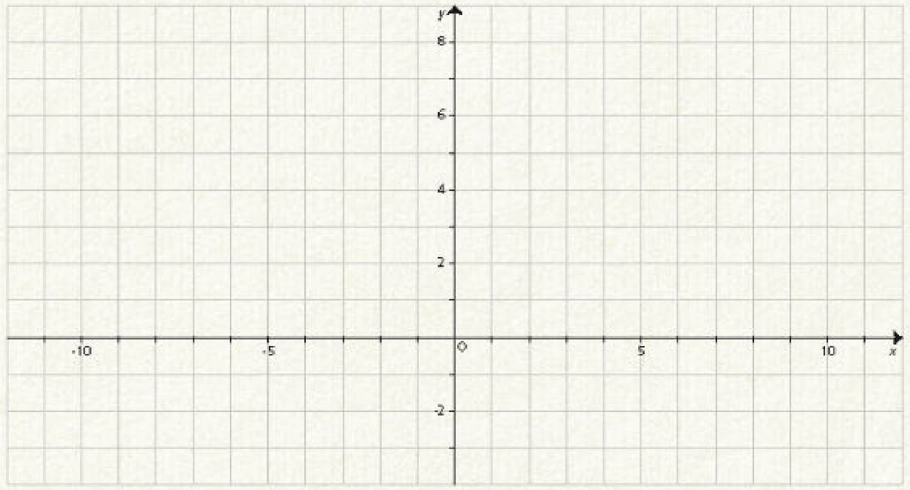
### Practicando lo aprendido

Trabajen las siguientes actividades en equipos de tres o cuatro integrantes.

1. Tabulen la función *valor absoluto* considerando valores entre $-4$ y 4.

| $x$ | $y = \|x\|$ |
|---|---|
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |

2. Grafiquen en el siguiente plano los valores de la tabla anterior.




**Libroteca**

Para complementar el tema, te recomendamos leer el libro:

Bosch Giral, Carlos y Claudia Gómez Wulschner, *Una ventana a las incógnitas*, México, Santillana, 2002. Puedes encontrarlo en los Libros del Rincón.

3. Revisen el recibo de la compañía de luz que mostramos a continuación. Ahí aparecen las tarifas con las que se cobra la energía eléctrica consumida en un hogar, las cuales pueden variar por la zona o por el consumo promedio.


4. Se aplica la tarifa 1 cuando el consumo mensual es entre 1 y 75 kWh, y la tarifa 2 cuando el consumo es entre 76 y 140 kWh. Si el consumo rebasa los 140 kWh se cobra a $ 2.727 cada kWh adicional.

| Tarifas | Consumo en kWh | Precio por kWh |
|---|---|---|
| tarifa 1 | de 1 a 75 | 0.763 |
| tarifa 2 | de 76 a 140 | 0.933 |
| tarifa 3 | excedente | 2.727 |

a) ¿Cuánto pagarán en un hogar cuyo consumo fue de 80 kWh? Expliquen cómo lo calcularon. ______

b) ¿Cuánto pagarán si su consumo es de 160 kWh? ¿Será el doble? ¿Por qué? ______

c) ¿Cuánto pagarán en un hogar cuyo consumo fue de 30 kWh? ______

d) ¿Cuánto pagarán si su consumo es de 60 kWh? ¿Será el doble? ¿Por qué? ______

**Saber más...**

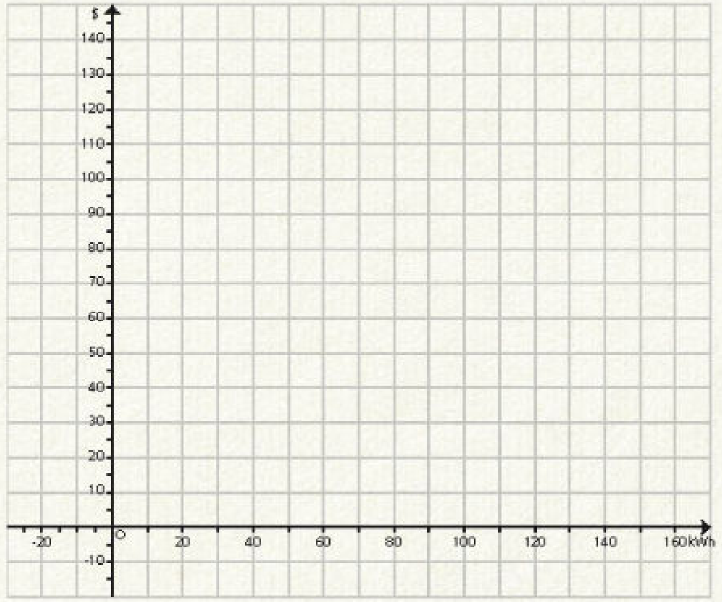
El Fideicomiso para el Ahorro de Energía Eléctrica tiene un programa de Eficiencia Energética cuya finalidad es promover el buen uso de la energía eléctrica, mediante el otorgamiento de asesoría y asistencia técnica, para que el aprovechamiento sustentable de ésta y la disminución de emisiones contribuya a la conservación de los recursos naturales. La información respecto a este programa se encuentra disponible en: http://www.fide.org.mx/index.php?option=com_content&view=article&id=121&Itemid=219 (Consulta: 5 de diciembre de 2016.)





e) Si queremos expresar con una función lo que se paga por el consumo eléctrico, ¿servirá la misma función para las distintas tarifas? ¿Cómo serán sus gráficas? ______

5. Tracen las gráficas que representan las tarifas 1 y 2. Usen el siguiente plano para hacer las dos gráficas. Si es necesario, modifiquen la escala.




a) ¿Qué tipo de líneas trazaron en sus gráficas? ______

b) Escriban la expresión algebraica que corresponde a cada una de estas líneas. ______

6. Consulten su gráfica para contestar las siguientes preguntas.

a) ¿Cuánto pagará una familia cuyo consumo es de 100 kWh? ______

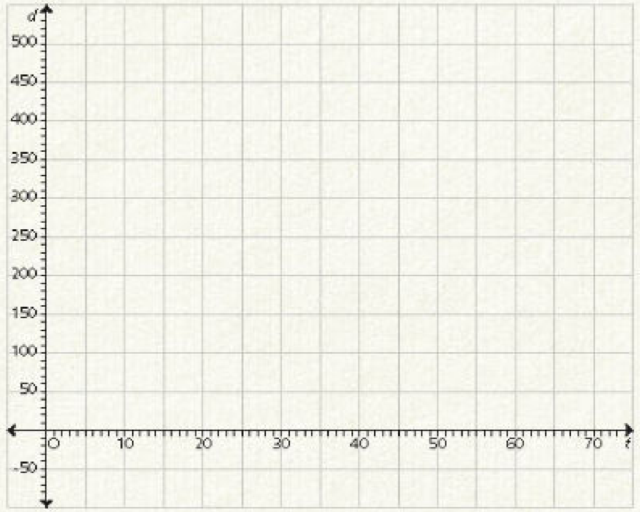
b) ¿Cuánto consume una familia que paga $ 100? ______

c) ¿Cuánto debe consumir esta familia si quiere reducir sus gastos a la mitad? Justifiquen su respuesta. ______

7. Retomemos el problema de los trenes, planteado en la sección "Lo que sé". Son dos trenes que van en direcciones opuestas a 65 km/h y 85 km/h, respectivamente, cuyos recorridos y distancia entre ellos ya graficaron.

a) ¿Qué cambiará en la gráfica si el que va más rápido se detiene en una estación a 150 km del punto de partida? Expliquen su respuesta. ______

b) Consideren ahora que el mismo tren se queda en la estación por media hora, y al retomar su camino lo hace más lento, pues comienza a subir la montaña; la mueva velocidad será de 70 km/h. Elaboren la gráfica con las nuevas condiciones del problema.




**TIC**

En la página disponible en http://iescomplutense.es/wp-content/uploads/2010/10/Hoja-12-Funciones-lineales-y-cuadráticas.ej-pend-3eso.pdf se incluyen algunos ejercicios sobre funciones lineales y cuadráticas. Forma equipo con dos de tus compañeros y resuélvanlos. (Consulta: 5 de diciembre de 2016.)

c) Encuentren juntos la ecuación para cada una de las etapas del recorrido. La primera será desde que salen hasta que se detiene en la estación, la segunda durante el tiempo que está detenido y la tercera cuando retoma la marcha a la nueva velocidad.

Primera etapa: ______

Segunda etapa: ______

Tercera etapa: ______

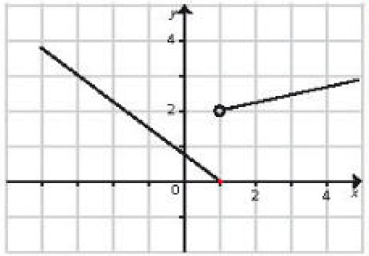
d) Completen la expresión algebraica de la función, así como los rangos de valores para $x$.

$$f(x)=\begin{cases} \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_ < x < \_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_ < x < \_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_ < x < \_\_\_ \end{cases}$$

Comparen sus respuestas con las de otros compañeros y con la ayuda de su profesor reflexionen cómo son las gráficas de las funciones cuando varían los rangos de su variable independiente.

## EL RINCÓN MATEMÁTICO

Una *función por partes* o por secciones es aquella cuya regla de dependencia es diferente para distintos intervalos y cuya unión pertenece al dominio de la función. En el siguiente plano se muestra un ejemplo de una función por secciones.








## Aplicando lo aprendido

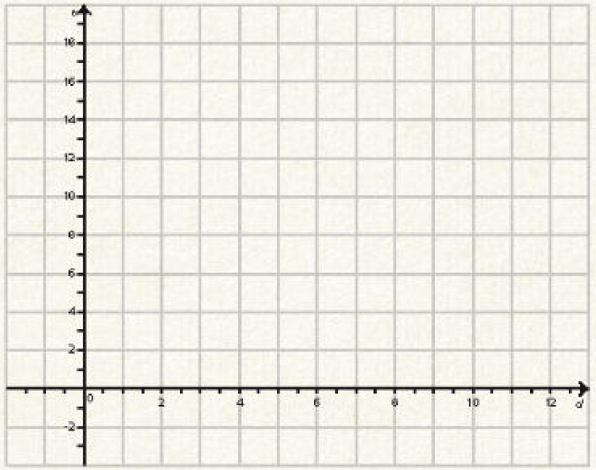
Para resolver estas actividades trabajen en equipos de cuatro integrantes.

1. Pensando en las carreras de velocidad en el atletismo, ¿a qué velocidad creen que pueden correr una distancia de 100 metros? Consideren que la velocidad récord en la carrera de 100 metros planos (considerada la de mayor velocidad) es de 10.43 s para las mujeres y 9.53 s para los hombres. ______

   a) De ser posible, organicen con su profesor de deportes un ejercicio para que midan su velocidad y sustituyan la estimación por el dato correcto, si no se puede, de todos modos vacíen en la tabla siguiente los tiempos de cada uno de los miembros del equipo, sean estimados o reales.

| Corredor | Distancia | Tiempo |
|---|---|---|
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |

   b) Localicen en el siguiente plano los puntos que representen los tiempos de cada corredor.




**Saber más...**

Los deportistas olímpicos son un ejemplo de dedicación porque los niveles de esfuerzo que alcanzan, ya sea en velocidad, fuerza o altura, sólo se logran con un arduo trabajo de muchos años. En el caso de los paralímpicos, nuestro país ha tenido logros realmente increíbles; en Londres 2012 se obtuvieron 21 medallas: seis de oro, cuatro de plata y 11 de bronce.

Fuente: "Atletas paralímpicos suman 21 medallas para México en Londres", *Zócalo*. Recuperado de: http://www.zocalo.com.mx/seccion/articulo/atletas-paralimpicos-suman-21-medallas-para-mexico-en-londres (Consulta: 5 de diciembre de 2016.)

   c) Escriban las ecuaciones que expresan la forma de la función, así como el rango de valores para $x$.

   d) ¿Qué distancia habrán recorrido a los 10, 20 y 30 segundos? ______

   e) ¿En cuánto tiempo terminarán la carrera? ______

   f) Pregunten sus tiempos a los demás equipos. ¿En qué posición están a los 10, 20 y 30 segundos? ______

   g) ¿Quién ganará la carrera? ______

Comparen sus resultados con los de otros compañeros y con la ayuda de su profesor comprueben que sus respuestas son correctas.

**EJE: MANEJO DE LA INFORMACIÓN**

**TEMA: NOCIONES DE PROBABILIDAD**

## Contenido 20

Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto).

### LO QUE SÉ

Resuelve las siguientes actividades, de manera individual.

1. Cuando vas a participar en una rifa surge siempre una duda, ¿cuál será el boleto que vas a elegir? Si consideramos que los boletos constan de dos cifras como máximo, tenemos que escoger dos dígitos al azar.
   a) ¿Cuántas opciones diferentes tienes para elegir? Recuerda que también tienes el 0 como opción. ______

   Podemos definir algunos eventos que pueden suceder con tu boleto, tales como $A < 30$ y $B =$ un número par.

   b) ¿Cuál es la probabilidad de $A$? ______
   c) ¿Cuál es la probabilidad de $B$? ______
   d) ¿Cuál es la probabilidad de $A \cap B$? ______
   e) ¿Cuál es la probabilidad de $A \cup B$? ______
   f) ¿Cuál es la probabilidad de que tu boleto sea 10? ______
2. Continuemos con el mismo experimento. Define dos *eventos simples* y dos *eventos compuestos* para la elección de tu boleto.

| Eventos simples | Eventos compuestos |
|---|---|
| | |
| | |

3. Ahora define dos eventos que sean *ajenos* entre sí, para la elección de tu boleto. ______
   a) ¿Cuál es la probabilidad de la intersección? ______
   b) ¿Cuál es la probabilidad de la unión? ______
   c) ¿Qué características deben tener dos eventos para que sean ajenos entre sí? ______
4. Ahora pensemos en la posibilidad de que el boleto no esté numerado, sino que conste de la combinación de dos letras. ¿Cuántas opciones de boletos tienes? ______
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que tengas dos letras iguales? ______

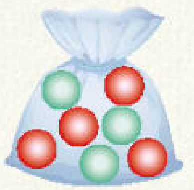
Compara tus resultados con los de otros compañeros y con la ayuda de su profesor comprueben que sus respuestas sean correctas.





### PRACTICANDO LO APRENDIDO

Contesten las siguientes preguntas, en equipo.



1. Tenemos 4 pelotas rojas y 3 pelotas verdes en una bolsa, y sacamos una pelota al azar.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de sacar una pelota roja? ______
   b) ¿Cuál es la probabilidad de sacar una pelota verde? ______
   c) Después de haber sacado la primera pelota, queremos sacar una más. Para saber la probabilidad de que sea roja nos preguntamos inmediatamente, ¿cuántas pelotas rojas quedan? ______
   d) Expliquen si esta respuesta se ve afectada por lo que obtuvimos en la primera extracción. ______
   e) Completen la tabla escribiendo cuál es la probabilidad de que la segunda pelota sea roja, considerando lo que sucedió en la primera oportunidad.

| | Primera pelota roja | Primera pelota verde |
|---|---|---|
| Probabilidad de que la segunda pelota sea roja | | |

   f) Expliquen el método que emplearon para completar la tabla. ______
   g) Si antes de sacar la segunda pelota regresamos la primera, ¿tendremos la misma probabilidad de sacar una pelota roja en la segunda oportunidad? Justifiquen su respuesta. ______
2. Al tirar dos dados al mismo tiempo, ¿influye la respuesta de uno en el otro? ______
   a) ¿Cuántos resultados diferentes podemos obtener? ______
   b) En la siguiente tabla definimos una serie de eventos para nuestro par de dados. Indica cuáles son dependientes y cuáles, **independientes**.

| Evento 1 | Evento 2 | Dependiente o independiente |
|---|---|---|
| $A$ = Sale al menos un uno | $A$ = Sale un número par | |
| $X$ = Sale al menos un uno | $Y$ = Sale exactamente un dos | |
| $N$ = Sale uno en el primer dado | $M$ = Sale dos en el segundo dado | |
| $E$ = Sale cinco en el primero | $Y$ = La suma de ambos es siete | |
| $G$ = El primero sale menor de cinco | $Y$ = En el segundo sale un dos | |

**Glosario**

**Independiente.** Dos eventos son independientes cuando el resultado de uno no afecta la probabilidad del otro. De manera similar, varios eventos pueden ser independientes cuando el resultado de cualquiera de ellos no afecta a los otros.

**TIC**

Te recomendamos visitar la siguiente página y resolver los problemas de probabilidad de eventos independientes, con ayuda de tus compañeros. Está disponible en: http://www.montereyinstitute.org/courses/Algebra1/COURSE_TEXT_RESOURCE/U12_L2_T2_text_final_es.html (Consulta: 5 de diciembre de 2016.)

### EL RINCÓN MATEMÁTICO

Los eventos $A$ y $B$ son *independientes* si la ocurrencia de uno no afecta la probabilidad de la ocurrencia del otro. Si $A$ y $B$ son independientes, entonces, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. A esta multiplicación se le conoce como *regla del producto de probabilidad*.

3. Sigamos con el experimento de tirar dos dados. Encuentren tres parejas de eventos independientes y tres dependientes. ¿Cuál es la probabilidad de que suceda cada uno? ¿Cuál es la probabilidad de la intersección de ellos? Completen la siguiente tabla.

| Eventos dependientes | | |
|---|---|---|
| $A$ = | Casos favorables para $A$ = <br> $P(A)$ = | Casos favorables para $A \cap B$ = |
| $B$ = | Casos favorables para $B$ = <br> $P(B)$ = | $P(A \cap B)$ = |
| $P$ = | Casos favorables para $P$ = <br> $P(P)$ = | Casos favorables para $P \cap Q$ = |
| $Q$ = | Casos favorables para $Q$ = <br> $P(Q)$ = | $P(P \cap Q)$ = |
| $V$ = | Casos favorables para $V$ = <br> $P(V)$ = | Casos favorables para $V \cap W$ = |
| $W$ = | Casos favorables para $W$ = <br> $P(W)$ = | $P(V \cap W)$ = |

| Eventos independientes | | |
|---|---|---|
| $F$ = | Casos favorables para $F$ = <br> $P(F)$ = | Casos favorables para $F \cap E$ = |
| $E$ = | Casos favorables para $E$ = <br> $P(E)$ = | $P(F \cap E)$ = |
| $R$ = | Casos favorables para $R$ = <br> $(R)$ = | Casos favorables para $R \cap S$ = |
| $S$ = | Casos favorables para $S$ = <br> $P(S)$ = | $P(R \cap S)$ = |
| $T$ = | Casos favorables para $T$ = <br> $P(T)$ = | Casos favorables para $T \cap U$ = |
| $U$ = | Casos favorables para $U$ = <br> $P(U)$ = | $P(T \cap U)$ = |

a) ¿Qué tienen en común las probabilidades de las intersecciones de eventos independientes? ______

b) ¿Sucede lo mismo en los eventos dependientes? ______

4. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona elegida al azar cumpla años el día de hoy? ______





5. Tenemos dos eventos $A$ y $B$, cada uno de ellos consiste en que una persona elegida al azar cumpla años el día de hoy. ¿Son independientes estos eventos? Justifiquen su respuesta. ______
   a) ¿Cuál es la probabilidad de $A \cap B$? ______
   b) ¿Qué significa esta intersección en la situación planteada? ______
   c) ¿Cuál es la probabilidad de $A \cup B$? ______
   d) ¿Qué significa esta unión para la situación planteada? ______

Comparen sus resultados con los de otros compañeros y reflexionen sobre las diferencias que encuentren. Con la ayuda de su profesor comprueben que sus respuestas son correctas.

**Saber más...**

La probabilidad de fallas en sistemas complejos se reduce notablemente duplicando algunos puntos críticos, por ejemplo, los automóviles de carrera de la serie NASCAR tienen dos sistemas de ignición, esto, considerando que si uno falla, se tenga otro de reserva. Esta idea funciona si los dos sistemas son independientes, de esta manera, si la probabilidad de que un componente falle es de 0.001 (por ejemplo) la probabilidad de que fallen ambos será sólo de 0.000001.

## APLICANDO LO APRENDIDO

1. Pensemos nuevamente en el problema del boleto estudiado en la sección "Lo que sé". Ahora consideremos un boleto que contenga una letra y un número.
   a) Define dos eventos independientes para este experimento.
      Evento 1 ______
      Evento 2 ______
   b) Explica por qué son independientes. ______
2. Tomando en cuenta el boleto que consta de una letra y un número, calcula las siguientes probabilidades.
   a) $P$ (obtener la letra $A$, sin importar el número). ______
   b) $P$ (obtener un número par, sin importar la letra). ______
   c) $P$ (obtener $A1$). ______
   d) $P$ (obtener $Z9$). ______
   e) $P$ (una vocal y el número 1). ______
   f) $P$ (una vocal y un número mayor de 5). ______
   g) $P$ (obtener $A$ y un número par). ______
   h) $P$ (obtener $A$ o el número 1). ______
   i) $P$ (obtener una vocal o un número par). ______
   j) $P$ (una vocal o el número 1). ______
   k) $P$ (una vocal o un número mayor de 5). ______
   l) $P$ (obtener $A$ o un número par). ______
   m) $P$ (obtener una vocal o un número par). ______

Compara tus respuestas con las de otros compañeros y con la ayuda de su profesor comprueben que sus resultados sean correctos.

EVALUACIÓN TIPO PISA

**I. El más alto**

1. ¿Cuál es la altura del poste que se asegura con un cable de 2.50 m, si las normas de seguridad indican que la distancia entre el poste y el punto en que se fija al suelo debe ser la mitad de la altura del poste y el cable debe sujetarse 10 cm debajo de la punta del poste?

a) 223 cm
b) 200 cm
c) 230 cm
d) 233 cm
e) 323 cm

**II. El olvido**

Marisol corre por el cuaderno que olvidó en la biblioteca desde el salón de música. Cuenta exactamente con 10 minutos para ir y regresar antes de que inicie la clase. En el camino de regreso, se encuentra con Hugo, por lo que se detiene durante 4 minutos a platicar, lo que la obliga a correr aún más para regresar a tiempo. La distancia entre la biblioteca y el salón es de 15 m.

1. Suponiendo que todos los movimientos corresponden a rectas, grafica la distancia a la que se encuentra en cada momento en el salón, desde que sale hasta que regresa al salón.

**III. El patio escolar**

1. En un área rural se colocará una barda para rodear el patio de la escuela. Se tiene material para levantar una barda que mida 40 m, y la barda se empleará sólo en tres partes del patio, pues el cuarto lado quedará bordeado por la misma escuela. ¿Cuál es el mayor tamaño que se le puede dar al patio?





EVALUACIÓN TIPO PISA

**IV. Máscaras antigás**

La revista *Time* reportó que cuando se probaron 19 218 máscaras antigás, se encontró que 10 322 estaban defectuosas. Una investigación más a fondo seleccionó aleatoriamente dos máscaras de esta población para calcular ciertas estadísticas.

1. Calcula las siguientes probabilidades, basándote en los datos proporcionados por la revista.

a) La probabilidad de que ambas salgan defectuosas, si la primera máscara se reemplaza antes de seleccionar la segunda. ____

b) La probabilidad de que ambas salgan defectuosas, si la primera máscara no se reemplaza antes de seleccionar la segunda. ____

c) ¿Cuál es la diferencia entre los incisos a y b? ____

**V. En tiempos de Roma**

El teatro de la fotografía se encuentra en Lucera, Italia, y fue construido en el año 328 a.n.e.

1. Identifica en la foto las figuras que se pueden considerar homotéticas y determina el centro de homotecia. Justifica tu respuesta. ____

**VI. Para llegar a tiempo**

Un reloj despertador tiene una probabilidad de funcionar adecuadamente 97 de cada 100 mañanas. Con esto en mente, contesta las siguientes preguntas; justifica tus respuestas.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que tu despertador no funcione la mañana de tu examen final?

2. Si en vez de uno tienes dos despertadores iguales, ¿cuál es la probabilidad de que ambos fallen la mañana de tu examen? ____

Competencias que se favorecen:

- Resolver problemas de manera autónoma.
- Comunicar información matemática.
- Validar procedimientos y resultados.
- Manejar técnicas eficientemente.





# BLOQUE 4

## Aprendizajes esperados

- Utiliza en casos sencillos expresiones generales cuadráticas para definir el enésimo término de una sucesión.
- Resuelve problemas que implican el uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.
- Calcula y explica el significado del rango y la desviación media.

EJE: SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO

TEMA: PATRONES Y ECUACIONES

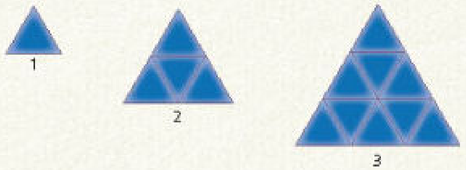
## Contenido 21

Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión.

### LO QUE SÉ

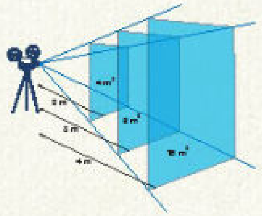
Resuelve, de manera individual, los siguientes problemas.

1. Una estructura formada por piezas triangulares muestra el siguiente patrón.




   a) ¿Cuántos triángulos deben agregarse a la figura 3 para formar la figura 4? ____
   b) ¿Cuántos triángulos tendría en total la figura 4? ____
   c) ¿Cuántos triángulos tendría en total la figura 5? ____
   d) Escribe cuántos triángulos tendría en total la figura 10. ____

2. Al proyectar una película en una pantalla, el área de proyección aumenta de acuerdo con la distancia a la que se encuentre el proyector, como se muestra en la siguiente imagen.



   a) ¿Qué expresión algebraica muestra la relación entre la distancia y el área de proyección? ____
   b) Suponiendo que el proyector está separado 23 m de una gran pared, ¿cuál es el área de proyección? ____
   c) Completa la siguiente tabla.

| Distancia entre el proyector y la superficie de proyección (m) | Área de proyección ($m^2$) |
|---|---|
| 1 | |
| 5 | |
| 6 | |
| 7 | |
| 10 | |
| 15 | |
| $x$ | $y$ |

3. ¿Qué términos siguen en esta secuencia? $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, ____, ____, ...

Comparen sus respuestas con las de otros compañeros y con la ayuda de su profesor comprueben que sus resultados son correctos.

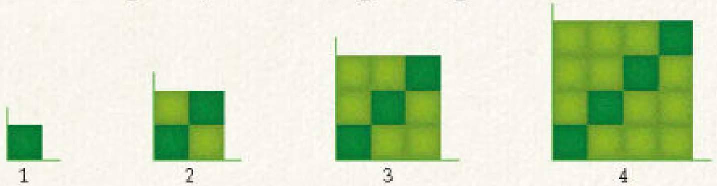




### PRACTICANDO LO APRENDIDO

Reúnanse en equipos para resolver los siguientes problemas.

1. La sala de un museo va a ser cubierta con losetas, a partir de una de sus esquinas, usando el siguiente patrón de tonalidades.




   a) ¿Cuántas losetas oscuras se necesitan para el nivel 5 de la figura? ____
   b) ¿Cuántas losetas claras se necesitan para el nivel 5 de la figura? ____

**Saber más...**

Te invitamos a conocer el Museo Memoria y Tolerancia, que se encuentra en la Ciudad de México, el cual tiene el propósito de difundir la importancia de los derechos humanos a través de varias salas, donde se tocan temas como: diálogo, discriminación, derechos humanos, el poder de los medios de comunicación, la tolerancia, la no violencia, entre otros; tiene la finalidad de crear conciencia a través de la memoria histórica, particularmente a partir de los genocidios y otros crímenes, además, pretende alertar sobre el peligro de la indiferencia, la discriminación y la violencia para crear responsabilidad, respeto y conciencia en cada individuo.

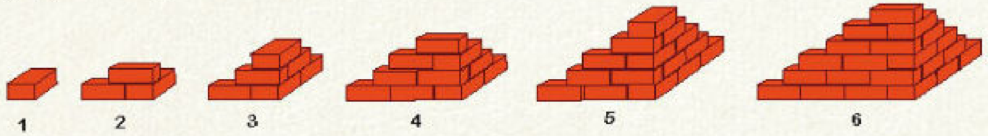
FUENTE: Museo Memoria y Tolerancia, recuperado de: http://www.myt.org.mx/tolerancia.php (Consulta: 5 de diciembre de 2016.)

2. Completen la siguiente tabla.

| Nivel | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Losetas | | | | | | | | | |
| Losetas oscuras | | | | | | | | | |
| Losetas claras | | | | | | | | | |

   a) ¿Cuántas losetas de color oscuro se necesitan para el nivel 9? ____
   b) Escribe cuántas se necesitan de color claro para el mismo nivel. ____
   c) ¿Cuántas losetas en total se necesitan para el nivel 9? ____
   d) Escribe la cantidad total de losetas para el nivel 10. ____
   e) ¿Cuántas losetas en total se necesitan para el nivel 32? ____
   f) ¿Qué expresión permite calcular el total de losetas que se necesitan para cualquier nivel? ____
   g) ¿Qué expresión algebraica permite obtener el número de losetas oscuras que se necesitan para cualquier nivel? ____
   h) ¿Qué expresión algebraica permite obtener el número de losetas claras que se necesitan para cualquier nivel? ____

3. La imagen siguiente muestra la forma de acomodar los tabiques en la construcción de la esquina de una habitación. Analicen el patrón que se sigue y contesten las preguntas siguientes.




   a) ¿Cuántos tabiques va a tener el nivel 7 de la figura? ____

b) ¿Cuántos tabiques va a tener el nivel 10 de la figura? ______

c) Expliquen cómo se puede obtener el número de tabiques de una figura, si se sabe el número de tabiques de la figura anterior. ______

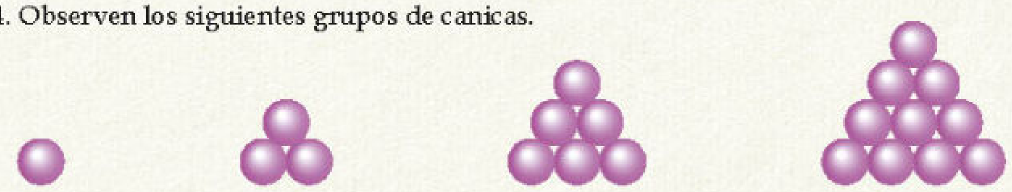
d) Completen la siguiente tabla, basándose en los niveles de tabiques de la figura anterior.

| Figura | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tabiques | | | | | | | | | |

e) Una de las figuras de esta sucesión tiene 5 050 tabiques. ¿Qué número de figura es? ______

f) ¿La figura 55 tiene 1 540 tabiques? Justifiquen su respuesta. ______

4. Observen los siguientes grupos de canicas.



1 2 3 4

a) Obtengan las primeras diferencias y las segundas diferencias de los términos.

b) De acuerdo con el método de las diferencias, ¿qué sistema de ecuaciones se determina? ______

c) ¿Cuáles son los valores de $a$, $b$ y $c$? ______

d) Escribe la expresión general para esta secuencia. ______

e) Completen la siguiente tabla, empleando el método de las diferencias.

| Término | 1 | 2 | 5 | 10 | 99 | 100 | 1 000 | 2 013 | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Canicas | | | | | | | | | |

f) En cada una de las siguientes sucesiones encuentren la expresión general, usando el método de las diferencias.

- 0, 3, 8, 15, 24, 35, … ______
- 11, 26, 51, 86, 131, 186, … ______
- 3, 7, 13, 21, 31, 31, 43, … ______

5. Entre todo el equipo, planteen una expresión general cuadrática que represente una sucesión y obtengan los primeros cuatro términos de ella. Compartan con otro equipo solamente los términos encontrados y soliciten los cuatro términos que el otro equipo encontró, así, cada equipo deberá obtener la expresión que todos plantearon.

a) Escriban la expresión que planteó su equipo. ______





b) ¿Cuáles son los cinco primeros términos que resultaron de la expresión planteada? ______

c) Escriban una de las expresiones que plantearon otros equipos, así como los cinco primeros términos que resultan de ésta. ______

d) ¿Cuál es la expresión general que define el *enésimo* término de la secuencia de la actividad 1 de esta lección? ______

Comparen sus resultados con los de otros compañeros, y con la ayuda de su profesor comprueben que las expresiones que plantearon para encontrar el enésimo término en una sucesión son correctas.

**TIC**

Para complementar lo estudiado en esta lección, visiten la siguiente página electrónica, disponible en: http://www.disfrutalasmatematicas.com/algebra/sucesiones-encontrar-regla.html
(Consulta: 5 de diciembre de 2016.)

## EL RINCÓN MATEMÁTICO

### El método de diferencias

El *método de diferencias* permite obtener la regla de una *sucesión*. Para ello, es necesario calcular las diferencias entre los términos (primeras diferencias); con esta nueva sucesión, se vuelven a calcular las diferencias para los siguientes términos, y así sucesivamente, hasta llegar al término deseado. Si la *primera diferencia* es constante, la regla podrá expresarse como una *función lineal*. Si la constante se obtiene en la *segunda diferencia*, la expresión general será *cuadrática*. Cuando la constante se obtiene en la *tercera diferencia*, la expresión será de grado 3, y así sucesivamente. En general, las sucesiones deben tener la siguiente estructura:

Términos de la sucesión:
1: $a(1)^2 + b(1) + c =$ $a + b + c$
2: $a(2)^2 + b(2) + c =$ $4a + 2b + c$
3: $a(3)^2 + b(3) + c =$ $9a + 3b + c$
4: $a(4)^2 + b(4) + c =$ $16a + 4b + c$ …

Primeras diferencias:
$(4a + 2b + c) - (a + b + c) =$ $3a + b$
$(9a + 3b + c) - (4a + 2b + c) =$ $5a + b$
$(16a + 4b + c) - (9a + 3b + c) =$ $8a + b$ …

Segundas diferencias:
$(5a + b) - (3a + b) =$ $2a$
$(8a + b) - (5a + b) =$ $2a$ …

Ahora vemos que la secuencia 5, 11, 21, 35, 53, 75,… tiene las siguientes diferencias.

Términos de la sucesión: 1: 5, 2: 11, 3: 21, 4: 35, 5: 53, 6: 75 …

Primeras diferencias: 11 − 5 = 6, 21 − 11 = 10, 35 − 21 = 14, 53 − 35 = 18, 75 − 53 = 22 …

Segundas diferencias: 10 − 6 = 4, 14 − 10 = 4, 18 − 14 = 4, 22 − 18 = 4 …

A partir de aquí se plantea un sistema de ecuaciones, de modo que suceda lo siguiente.

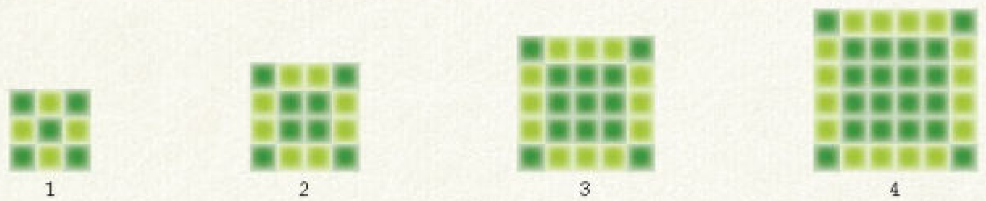
$a + b + c = 5$
$3a + b = 6$
$2a = 4$

Donde $a = 2$, $b = 0$ y $c = 3$. Al sustituir estos valores en la expresión $an^2 + bn + c$, se obtiene $2n^2 + (0)n + 3 = 2n^2 + 3$, que es la expresión general de la secuencia.

## APLICANDO LO APRENDIDO

Reúnanse en equipos para resolver los siguientes problemas.

1. ¿Cuántos cuadrados claros habrá en la enésima figura de la siguiente sucesión?



2. Los términos séptimo, octavo, noveno y décimo de una sucesión son: 82, 109, 140 y 175, respectivamente. ¿Cuál es la expresión general de esta sucesión?

3. El sistema de ecuaciones que se obtiene al aplicar el método de las diferencias en una sucesión es el que se muestra a continuación.

$a+b+c=2$

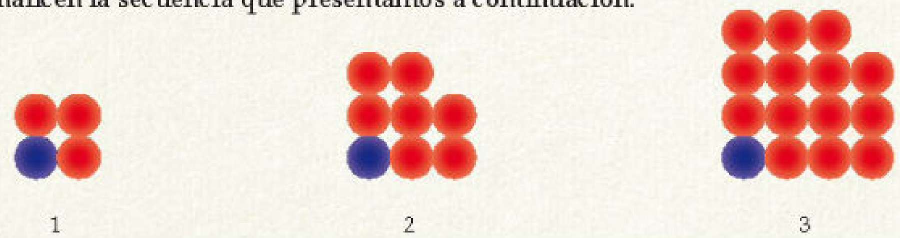
$3a+b=9$

$2a=6$

   a) Escriban la expresión general para este sistema de ecuaciones.
   b) ¿Cuánto suman los primeros cuatro términos de la sucesión?
   c) ¿Qué número ocupa la posición 10 dentro de la sucesión?
   d) ¿El número 1 450 pertenece a la secuencia?
      - ¿Por qué?

4. El primer término de una sucesión es –6. Al usar el método de las diferencias, el primer elemento de la primera diferencia es 12 y el término constante es 8, el cual se obtiene en la segunda diferencia.
   a) ¿Cuál es el tercer término de esta secuencia?
   b) Escriban la suma de los primeros dos términos de esta secuencia.
   c) ¿Cuál es la expresión general para esta secuencia?

5. Analicen la secuencia que presentamos a continuación.

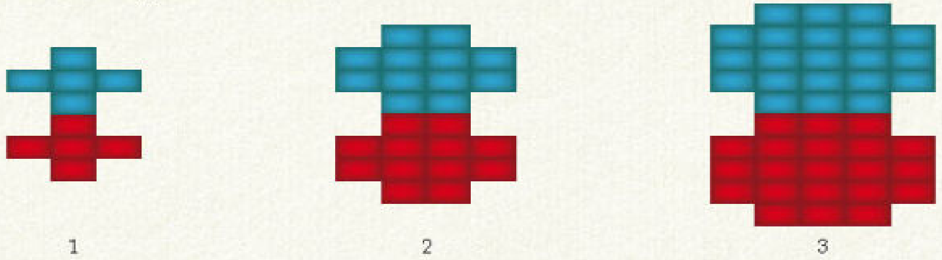






   a) ¿Cuál es la expresión general de la sucesión anterior?
   b) ¿Cuál es la expresión general de la sucesión de los puntos rojos solamente?
   c) ¿El número 9 999, pertenece a la secuencia?
      - ¿Por qué?
   d) ¿Qué lugar de la sucesión ocupa el número 960?
      Describan el argumento matemático de su respuesta.

6. Analicen la siguiente sucesión.



   a) ¿Cuál es la expresión general de la sucesión de rectángulos azules?
   b) Escriban la expresión general de la sucesión de rectángulos rojos.
   c) ¿Cuántos rectángulos rojos habrá en la figura 100?
   d) A continuación, escriban cuál es la expresión general de la sucesión de rectángulos azules.
      - ¿Por qué?
   e) ¿Cuál es la expresión general que permite calcular el total de rectángulos de una figura, sin importar el color?

7. Con la ayuda de su profesor, contesten, a manera de conclusión, ¿cuántos términos consecutivos de una sucesión son necesarios para obtener la expresión general?

Comparen sus respuestas con las de otros compañeros y reflexionen sobre las diferencias que encuentren.

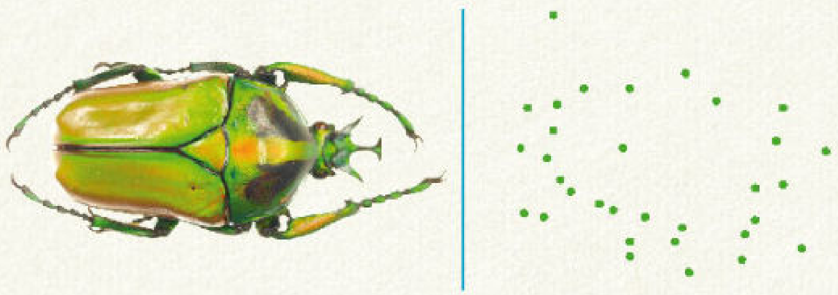
## Eje: Forma, espacio y medida
## Tema: Figuras y cuerpos

### Contenido 22

Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos.

### Lo que sé

1. Dibuja el simétrico de la siguiente figura, usando como eje de simetría la recta azul, y como referencia, los puntos marcados sobre el escarabajo y sus respectivos simétricos.



2. A partir de las siguientes figuras, escribe los datos que se solicitan.

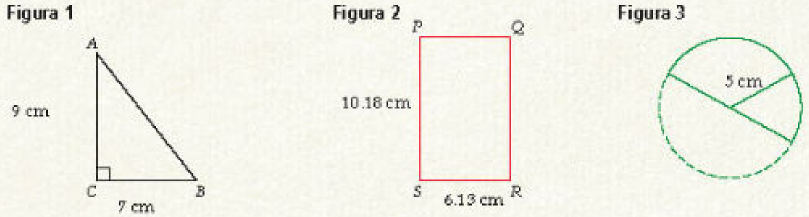



Figura 1:

a) Lado $AB$ = ____________ Área = ____________

Figura 2:

a) Si $PQRS$ es un rectángulo, ¿cómo son entre sí sus lados opuestos? ____________

b) ¿Cuánto mide su diagonal? ________ Área = ____________

Figura 3:

a) Longitud del diámetro = ____________

b) Área que encierra el semicírculo = ____________

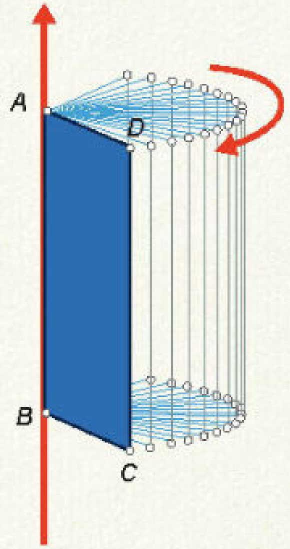




### Practicando lo aprendido

Reúnanse en equipos, analicen la siguiente situación y respondan lo que se pide.

1. Ingrid ha recortado un rectángulo de papel y lo pega por uno de sus lados a un popote. Al colocar el popote entre sus palmas, puede hacer girar ambos, como se observa en la figura de la derecha.




a) ¿Qué cuerpo geométrico se obtiene con este movimiento? ____________

b) ¿Cuántas bases tiene el cuerpo resultante? ____________

c) Escriban a continuación cuántas caras planas tiene el cuerpo resultante. ____________

d) ¿Cuántas caras curvas tiene el cuerpo resultante? ____________

e) ¿Cuál es su altura? ____________

f) ¿Qué figura geométrica es la **generatriz**? ____________

g) ¿Cuál es su **cúspide**? ____________

h) ¿Cuáles son sus vértices? ____________

i) ¿Cuál es la recta que representa su radio? ____________

j) ¿Cuánto mide su diámetro? ____________

**Glosario**

**Generatriz.** Es una línea que al girar alrededor de otra llamada directriz o eje de rotación, forma un cuerpo geométrico. Si es una recta, genera un cuerpo cilíndrico o cónico; si es una curva, con su movimiento genera una esfera o un cuerpo elipsoide.

**Cúspide.** En cuerpos piramidales, es el punto en el que se juntan los vértices de los triángulos que forman las caras de la pirámide; en cuerpos cónicos, es el punto en el que concurren las generatrices del cono.

2. Por otro lado, Emanuel trazó un triángulo rectángulo y también lo hizo rotar alrededor del popote, como se muestra en la figura siguiente.

a) ¿Qué cuerpo geométrico se obtiene con esta rotación? ____________

b) ¿Cuántas bases tiene el cuerpo resultante? ____________

c) Escriban cuántas caras planas tiene. ____________

d) ¿Cuántas caras curvas tiene? ____________

e) Escriban la medida de su altura. ____________

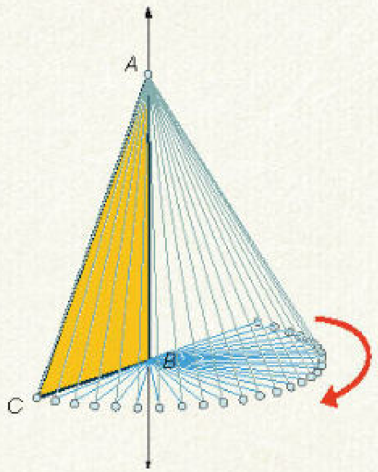
f) ¿Qué figura geométrica es la generatriz? ____________

g) ¿Cuál es su cúspide? ____________

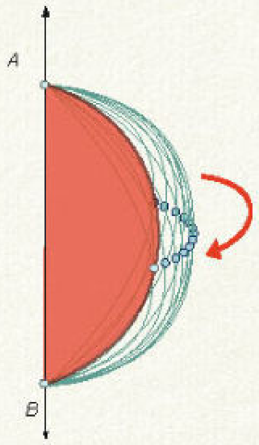
h) Señalen cuáles son sus vértices. ____________

i) ¿Qué recta representa su radio? ____________

j) ¿Cuánto mide su diámetro, si el segmento $BC$ mide 4 cm? ____________



3. Para obtener un cuerpo geométrico distinto, Leticia decidió recortar un semicírculo y también lo hizo rotar alrededor del popote, como vemos a continuación.




a) ¿Qué cuerpo geométrico se obtiene con este movimiento? ______
b) ¿Cuántas bases tiene? ______
c) Escriban cuántas caras planas tiene. ______
d) ¿Cuántas caras curvas? ______
e) ¿Cuál es su altura? ______
f) ¿Qué figura geométrica es la generatriz? ______
g) ¿Cuál es su cúspide? ______
h) ¿Cuáles son sus vértices? ______
i) ¿Cuánto mide su radio, si el segmento $AB$ tiene 3 cm? ______
j) ¿Cuánto mide su diámetro? ______

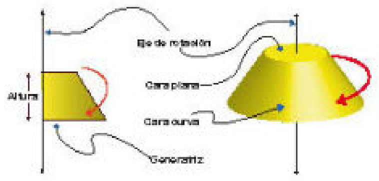
4. Con la guía de su profesor, compartan sus respuestas con otros equipos. En caso de que haya distintas apreciaciones, confronten los argumentos. Escriban algunos datos que no habían considerado antes de la discusión: ______.

## EL RINCÓN MATEMÁTICO

**Glosario**

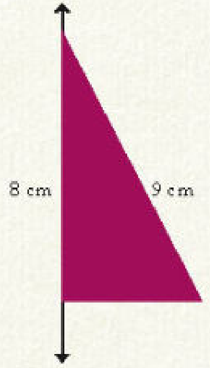
**Rotar.** Dar vueltas alrededor de un eje.
**Bosquejar.** Disponer o trabajar cualquier obra, pero sin concluirla.

Un *sólido de revolución* es el cuerpo que se genera al **rotar** una región del plano alrededor de una recta. La recta se llama *eje de rotación* y la figura original es la *generatriz*.




En el caso del cono, la *generatriz* es un triángulo rectángulo; para el cilindro, la generatriz es un rectángulo y para el caso de una esfera, la *generatriz* es una semicircunferencia.

5. Un triángulo rectángulo como el que se muestra, se usará para generar un sólido de revolución.




a) Usando las medidas indicadas, **bosquejen** en su cuaderno el *sólido de revolución* que se obtiene.
b) ¿Cuánto mide el radio de la base? ______
c) Escriban la medida del diámetro de la base. ______
d) ¿Cuánto mide la altura? ______
e) Ahora escriban cuántas caras curvas tiene. ______





6. Analicen cada uno de los siguientes objetos y considérenlos como sólidos de revolución.

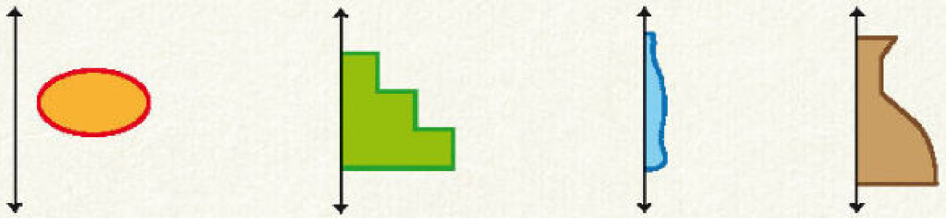
a) Dibujen en su cuaderno un modelo geométrico que permita observar el eje de rotación y la línea generatriz para obtener cada uno de los objetos.
b) Comparen sus trazos con los de otros equipos y reflexionen sobre las diferencias que encuentren. Escriban las diferencias encontradas. ______
c) ¿Qué objetos fueron los más complicados de modelar? ______
- ¿Por qué? ______

d) ¿Qué objetos se relacionan con el cono, el cilindro y la esfera? ______

7. Un espectáculo asombroso se realiza con pompas de jabón. Un hombre queda dentro de una burbuja de jabón formada al elevar un aro de 50 cm de diámetro lleno de espuma a partir del piso y en posición horizontal, de modo que se forma una gran burbuja alrededor del hombre. Suponiendo que el aro superior es paralelo al aro inferior y que están alineados.

a) ¿Qué solido se forma? ______
b) ¿Cuántas bases tiene? ______
c) Escriban ahora la cantidad de caras planas que tiene. ______
d) ¿Cuántas caras curvas? ______
e) Anoten la longitud de su radio. ______
f) ¿Cuánto mide su diámetro? ______

8. Ingrid, Emanuel y Lety, siguen experimentando con nuevas formas y observan el sólido que éstas generan. Estudien las siguientes generatrices y dibujen en su cuaderno los cuerpos que se obtienen por rotación sobre el eje. Asignen las medidas que les permitan desarrollar la siguiente actividad.



a) Diseñen en su cuaderno, en escala real, el desarrollo plano de alguno de los sólidos obtenidos.

b) Si es el caso, ¿cuánto mide la circunferencia de la base? ______

c) Es posible construir un triángulo con el contorno del cono? ______

- ¿Por qué? ______

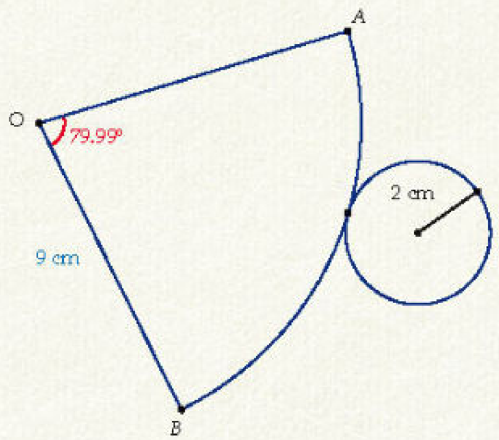
9. Diana considera que el siguiente desarrollo plano le permitirá construir un cono.

a) ¿Por qué la línea que va de $A$ a $B$ es una curva? ______

b) ¿Cuánto debe medir el segmento $OA$? ______

c) ¿Cuánto debe medir el arco $AB$? ______

d) En el siguiente espacio realicen los cálculos necesarios para justificar la respuesta del inciso anterior.




**Libroteca**

Para profundizar en la aplicación de estos temas, te sugerimos que leas el siguiente libro:
Salvadó, Albert, *El maestro de Keops*, México, Océano, 2006, el cual podrás encontrar en la Biblioteca de Aula.

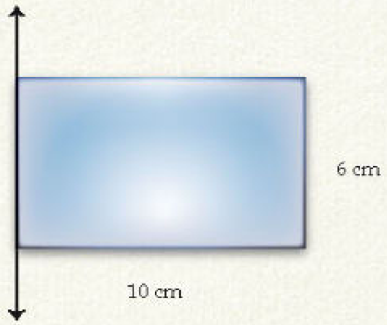
e) ¿Cuánto mide la longitud de la circunferencia de la base? ______

10. Carlos usará un rectángulo, como el que se muestra a continuación, para generar un sólido de revolución.

a) En su cuaderno dibujen un bosquejo del sólido de revolución que se obtiene.

b) ¿Cuánto mide el radio de la base? ______

c) Escriban la longitud del diámetro de la base. ______




d) ¿Cuánto mide la altura? ______

e) La cantidad de caras curvas que tiene el cuerpo resultante es: ______

f) ¿Cuántas caras planas tiene? ______





11. Diseñen, en escala real, el desarrollo plano del sólido obtenido en la actividad anterior.

a) ¿Es suficiente una *hoja tamaño oficio* para el dibujo del desarrollo plano? ______

- ¿Por qué? ______

b) Construyan el sólido.

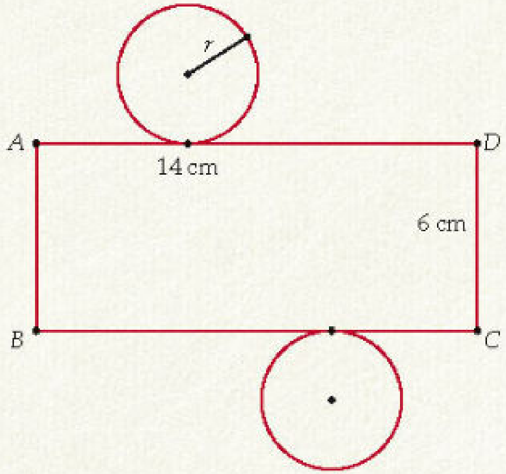
c) ¿Qué diferencias encuentran al comparar el sólido que construyeron con los que hicieron otros compañeros?

12. El siguiente desarrollo plano corresponde a un cilindro. Basándose en los datos que se muestran, contesten las siguientes preguntas.

a) ¿Cuánto mide $r$? ______

b) ¿Cuánto mide el segmento $AB$? ______

c) ¿Cuánto mide la longitud de la circunferencia? ______




Comparen sus respuestas y trazos con los de otros compañeros, y con la ayuda de su profesor reflexionen sobre los resultados que se obtienen al rotar distintas figuras planas.

**TIC**

Una página que complementará la información que hasta el momento has estudiado la encontrarás en http://www.disfrutalasmatematicas.com/geometria/cono.html (Consulta: 5 de diciembre de 2016.)
en la que se publica información sobre el cono como un cuerpo geométrico.
Selecciona la opción "Un cono es un triángulo en rotación" y observa la animación.
¿Qué relación tiene con lo que has explorado en esta lección?

______

En la página http://www.disfrutalasmatematicas.com/geometria/cilindro.html (Consulta: 5 de diciembre de 2016.)
selecciona la opción "Drag" e interactúa con el modelo tridimensional.
¿Qué relación tiene con lo que has explorado en esta lección?

______

También explora las aplicaciones y conceptos publicados en la siguiente dirección electrónica http://www.disfrutalasmatematicas.com/geometria/esfera.html (Consulta: 5 de diciembre de 2016.)
¿Qué relación tiene con lo que has explorado en esta lección?

______

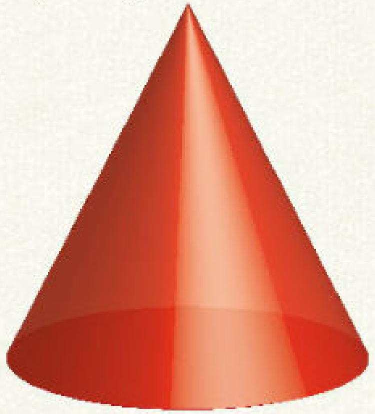
## APLICANDO LO APRENDIDO

Resuelve, de manera individual, los siguientes problemas.

1. Un triángulo cuyos lados son 3 cm, 4 cm y 5 cm, se usará para crear un sólido de revolución, teniendo como eje el lado menor. ¿Cuánto medirá el radio de la base? ____________

2. Observa la siguiente vasija. Dibuja la línea generatriz que permite la construcción del jarrón.

3. Dibuja el desarrollo plano de un cono como el que mostramos ahora, sabiendo que la altura es de la misma longitud que el diámetro de la base. Asigna las medidas que prefieras, sólo asegúrate de que cumplan con lo indicado.



4. Analiza el escarabajo mencionado en la sección "Lo que sé" de esta lección. Si en lugar de realizar una simetría, se rota el escarabajo alrededor de la recta, ¿qué veríamos del lado derecho de la imagen? ____________
   a) Justifica matemáticamente tu respuesta. ____________

Compara tus resultados con los de otros compañeros y con la ayuda de su profesor comprueben que sus respuestas y trazos son correctos.





## EJE: FORMA, ESPACIO Y MEDIDA
### TEMA: MEDIDA

## Contenido 23

Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente.

## LO QUE SÉ

Resuelve de manera individual los siguientes problemas:

1. De acuerdo con la Secretaría de Movilidad de la Ciudad de México, la tarifa autorizada para el servicio de taxi hasta el mes de abril de 2013 era la siguiente.

| | |
|---|---|
| 1. Taxi libre | a. Dos puertas: $6.40 |
| | b. Cuatro puertas: $7.04 |
| | c. Cada 250 metros o 45 segundos: $0.86 |
| 2. Taxi de sitio | a. Con base en vía pública: $10.56 |
| | b. Cada 250 metros o 45 segundos: $1.05 |
| | c. Con base en terminales de autobuses foráneos, mantiene su tarifa actual. |
| 3. Radiotaxi | a. Banderazo: $22.00 |
| | b. Cada 250 metros o 45 segundos: $1.48 |

FUENTE: www.aldf.gob.mx/sintesis-4d31a720d999c.pdf (Consulta: 5 de diciembre de 2016.)

**Saber más...**

En México existe la Secretaría de Movilidad (SEMOVI), el cual es un sistema gubernamental responsable de la planeación y gestión de los transportes y las vialidades en la capital de la república que, junto con la Comisión de Vialidad y Transporte Urbano (Covitur), organismo público descentralizado encargado de la planeación, proyección y construcción de obras en esta materia, son los encargados entre otras cosas, de regular el precio del transporte público para no afectar la economía de los ciudadanos.

FUENTE: Secretaría de Movilidad, recuperado de: http://www.semovi.cdmx.gob.mx/ (Consulta: 5 de diciembre de 2016.)

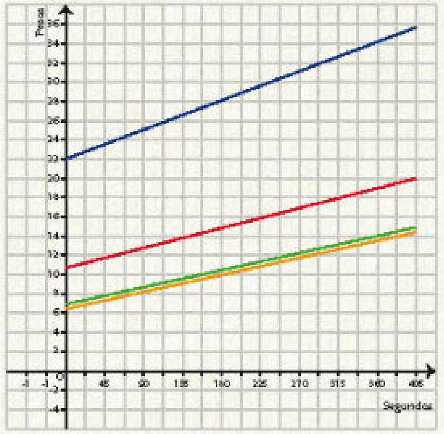
a) ¿Cuál es el servicio que representa cada una de las rectas resaltadas con color en el siguiente plano?

Azul: ____________

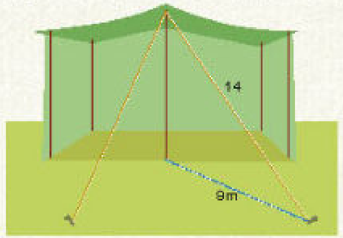
Rojo: ____________

Verde: ____________

Naranja: ____________




2. Para atar una lona se usaron varias cuerdas. La que está resaltada en naranja tiene una extensión de 18 m, de los cuales se usaron 2 m de cada extremo para hacer las ataduras. La distancia que hay de la base del soporte metálico al punto donde se ató la cuerda al suelo es de 9 m.



a) ¿El triángulo resaltado es un triángulo rectángulo? ______

- ¿Por qué? ______

b) ¿Cuál de los tres segmentos que forman el triángulo resaltado, es la hipotenusa? ______

c) ¿Cuáles son los catetos? ______

d) Explica qué sucede con la inclinación de la cuerda si la altura del soporte metálico disminuye o aumenta. ______

e) Explica qué sucede con la inclinación de la cuerda si la longitud entre la base del soporte y el punto de amarre con el suelo aumenta o disminuye. ______

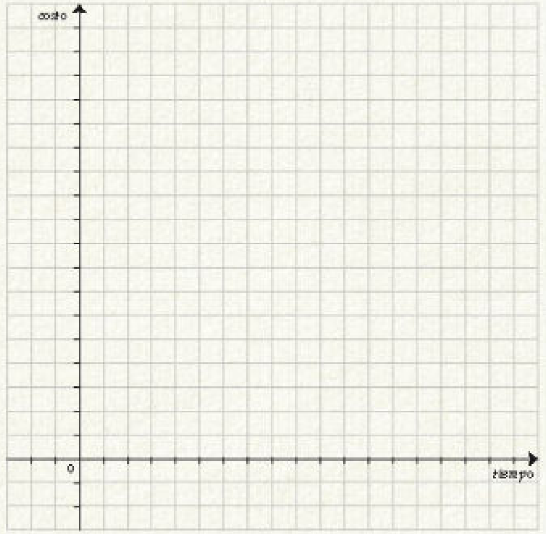
Compara tus respuestas con las de otros compañeros, y con la ayuda de su profesor comprueben que son correctos sus resultados.

## PRACTICANDO LO APRENDIDO

Organícense en equipos y resuelvan las siguientes situaciones.

1. Una caseta telefónica cobra $ 20 pesos por el uso del servicio de la cabina, más $ 1 por cada minuto que transcurra mientras dura la llamada.

a) Grafiquen la relación tiempo-costo, en el siguiente plano cartesiano.




b) Expliquen qué sucede en la gráfica si aumenta el costo del uso de la cabina. ______

c) Expliquen qué sucede en la gráfica si aumenta el costo por minuto transcurrido. ______

d) Para que la gráfica tenga una inclinación distinta, ¿es necesario aumentar el costo del uso de la cabina o el costo por minuto transcurrido? ______

e) Escriban una expresión que cumpla con esta condición. ______

**Libroteca**

Te sugerimos leer el siguiente libro:
Norton, Juster, *La recta y el punto*, México, FCE, 2005. Lo podrás encontrar en la Biblioteca de Aula.





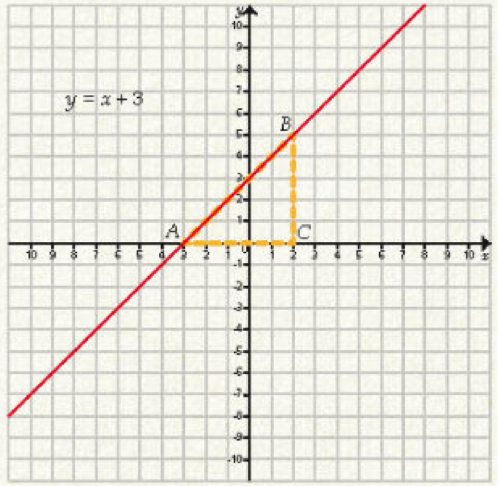
## EL RINCÓN MATEMÁTICO

La *pendiente* de una recta es la inclinación que tiene ésta con respecto a la horizontal, es decir, al eje $x$. Si la ecuación de la recta se encuentra en su forma $y = mx + b$, $m$ es la pendiente y $b$ es el punto en el que la recta toca al eje $y$.

Otra forma de obtener la pendiente es trazar un triángulo rectángulo cuya hipotenusa sea la recta en cuestión. Tomando como referencia el ángulo formado por la recta y una horizontal paralela al eje $x$, la pendiente está dada por el cociente formado por la longitud del cateto opuesto entre la longitud del cateto adyacente.

Por ejemplo, en la recta cuya ecuación es $y = 2x - 1$, la pendiente es $m = 2$. Por otro lado, si analizamos la gráfica de esta recta y el triángulo rectángulo que forma líneas paralelas a los ejes entre sus puntos (0, -1) y (2, 3), notamos que el cociente del cateto opuesto entre el cateto adyacente es $\frac{4}{2} = 2$, es decir, la pendiente también es igual a 2.

2. Analicen la siguiente gráfica y realicen lo que se pide.




a) ¿Cuál es la pendiente de la recta? ______

b) ¿Qué tipo de triángulo es $ABC$? ______

c) ¿Cuánto mide el ángulo $BAC$? ______

d) ¿Cuánto vale el cociente $\frac{BC}{AC}$? ______

3. Dibujen en su cuaderno tres triángulos rectángulos cuya hipotenusa sea parte de la recta $y = x + 3$ y cuyos catetos sean paralelos a los ejes coordenados (tomen como ejemplo el triángulo $ABC$).

a) Midan las longitudes de los lados de cada triángulo.

b) Tomando como referencia el ángulo que forman la hipotenusa y el lado paralelo al eje $x$, identifiquen en cada triángulo el *cateto opuesto* a este ángulo y el *cateto adyacente*.

c) A continuación escriban los cocientes formados por el cateto opuesto entre el cateto adyacente.

Triángulo 1: ______

Triángulo 2: ______

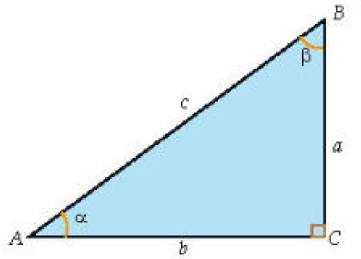
Triángulo 3: ______

d) Expliquen cómo son entre sí los cocientes y por qué. ______

e) ¿Qué relación existe entre la *pendiente* de la recta y los cocientes de los catetos? Justifiquen su respuesta. ______

## EL RINCÓN MATEMÁTICO

En un triángulo rectángulo los lados adquieren un concepto especial cuando se toma como referencia uno de los ángulos agudos. Por ejemplo, en el triángulo *ABC* que se muestra en esta sección, tomando como referencia el ángulo $\alpha$, el *cateto opuesto* es *BC* y el *cateto adyacente* es *AC*. Sin embargo, si el referente es el ángulo $\beta$, entonces el cateto opuesto es *AC* y el cateto adyacente es *BC*. En ambos casos la hipotenusa es *AB*.



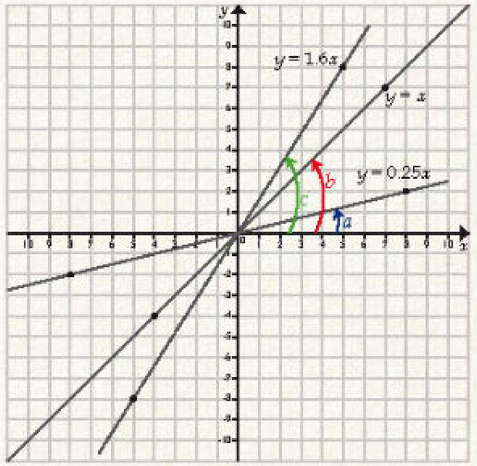

Otra manera de referirse a los catetos y la hipotenusa es mediante letras minúsculas. En la figura vemos que *a*, *b* y *c* son los lados del triángulo, donde *a* y *b* son los catetos y *c* es la hipotenusa.

Para el ángulo $\alpha$ el cateto opuesto es *a* y el cateto adyacente es *b*.

4. Analicen la información de las siguientes gráficas.

a) Escriban en los espacios las coordenadas de los siete puntos que se encuentran resaltados.

(____, ____) (____, ____) (____, ____)
(____, ____) (____, ____) (____, ____)
(____, ____)




b) Tracen un triángulo rectángulo en cada recta, usando uno de los puntos resaltados.

c) Completen la siguiente tabla basándose en la información de la gráfica.

| Ecuación | Ángulo con respecto al eje *x* | Medida del ángulo | Medida del cateto adyacente | Medida del cateto opuesto | Razón $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$ | Cociente (decimal) | Pendiente |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | *a* | | | | | | |
| | *b* | | | | | | |
| | *c* | | | | | | |

d) ¿Cómo son entre sí los resultados de las últimas dos columnas? ____________

e) ¿Qué datos de la tabla coinciden? ____________

Expliquen por qué existen estas coincidencias ____________

____________

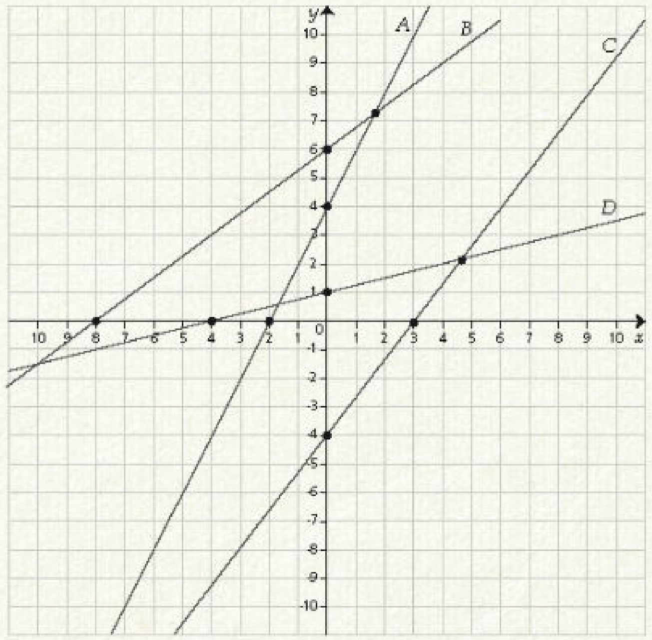




f) Comparen sus resultados con los obtenidos por otros equipos. ¿Cómo son entre sí los resultados de las dos últimas columnas? ____________

- ¿Por qué? ____________

5. Observen las características de cada una de las siguientes rectas.




a) Completen la siguiente tabla, basándose en las rectas mostradas en la gráfica.

| Recta | Ecuación | Medida del ángulo | Razón de cambio (fracción) $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$ | Razón de cambio (decimal) | Pendiente |
|---|---|---|---|---|---|
| *A* | | | | | |
| *B* | | | | | |
| *C* | | | | | |
| *D* | | | | | |

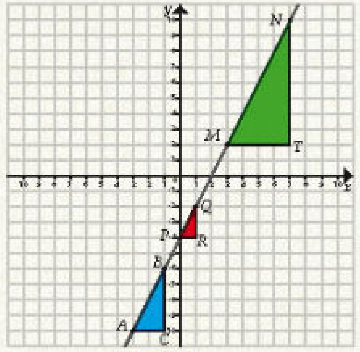
b) ¿Qué relación existe entre el ángulo que forma una recta con el eje *x* y la pendiente de la recta misma? ____________

TIC

Para complementar lo estudiado en este contenido, visiten la siguiente página electrónica: http://cuaed.unam.mx/math_media/geometria/pendiente/index.php y con la ayuda de su profesor concluyan respecto a la manera de encontrar la pendiente de una recta basándose en la razón que existe entre los catetos del triángulo rectángulo que forma con los ejes coordenados.
(Consulta: 5 de diciembre de 2016.)

## PRACTICANDO LO APRENDIDO

1. Trabajando ahora en parejas, observen la siguiente gráfica y contesten las preguntas.
   a) Analicen las características de los triángulos $ABC$, $PQR$ y $MNT$. ¿Qué tienen en común? ______
   b) ¿Calculen la amplitud de los siguientes ángulos:
      $BAC$: ______
      $QPR$: ______
      $NMT$: ______




   c) Expliquen la relación que existe entre estos ángulos. ______
   d) Utilicen la escala de la cuadrícula para determinar los siguientes cocientes.
      $\frac{BC}{AC} =$ ______
      $\frac{QR}{PR} =$ ______
      $\frac{NT}{MT} =$ ______
   e) ¿Cómo son entre sí estos cocientes? ______
   f) Expliquen lo que significa este resultado. ______

2. Tracen en su cuaderno otra recta idéntica a la mostrada en la figura del ejercicio 6. Usen esa recta como hipotenusa para trazar un nuevo triángulo rectángulo, cuyos catetos sean paralelos a los ejes y sus longitudes sean distintas a los triángulos anteriores.
   a) Ahora calculen la pendiente de la recta a partir de este triángulo.
   b) ¿Este cociente, es distinto al calculado en el ejercicio 6? ______
      Expliquen por qué. ______

Comparen sus resultados con los de otros compañeros y con la ayuda de su profesor reflexionen acerca de la relación que existe entre la pendiente de una recta y la longitud de los catetos del triángulo que forma con las paralelas a los ejes.

### Matemáticas con otras ciencias

Revisa tu libro de Matemáticas de segundo grado. En el contenido 6 del bloque 5 estudiaste lo que sucede en una gráfica si cambias los parámetros de una función de la forma $y = mx + b$. Esa misma variación de parámetros tienen que considerar los arquitectos e ingenieros que diseñan puentes o construcciones inclinadas, en los cuales deben calcular con precisión los materiales que van a emplear, las cantidades de los mismos, para realizar el diseño estructural de la resistencia de sus obras, etcétera.





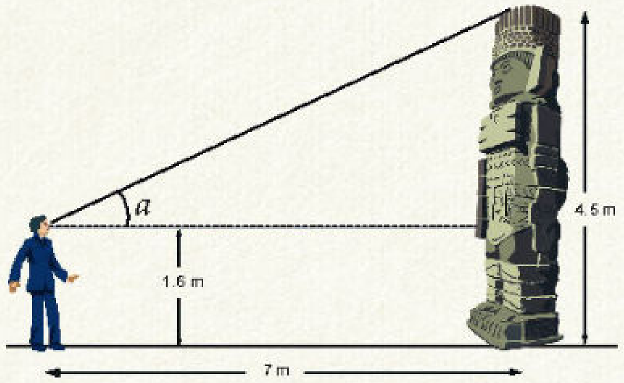
### Saber más...

Comprender la relación entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente, es muy importante en la vida diaria, porque hay muchas situaciones que pueden modelarse con una función lineal.
Por ejemplo, al conocer la medida de un ángulo podemos determinar si el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente es un número positivo o negativo, lo cual nos permite asegurar si el fenómeno crece o decrece respectivamente, es decir, si por cada unidad en $x$, aumenta (pendiente positiva) o disminuye su valor en $y$ (pendiente negativa).

## APLICANDO LO APRENDIDO

Resuelvan las siguientes situaciones trabajando en parejas.

1. Un turista observa la cúspide de un atlante de Tula.




   a) ¿Cuánto mide el ángulo de elevación $a$? ______
   b) Suponiendo que el ojo del turista es el origen de un plano cartesiano, ¿cuál es la expresión algebraica que representa su línea de visión? ______
   c) ¿Cuál es la pendiente de esta recta? ______
   d) Calculen cuánto aumenta la altura de la línea de visión por cada metro de distancia sobre la horizontal. ______
   e) ¿Cuál es la razón de cambio de su línea de visión? ______

Con la ayuda de su profesor, redacten una conclusión grupal sobre la relación que existe entre el valor de la pendiente de una recta, la medida del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente.

**EJE: FORMA, ESPACIO Y MEDIDA**
**TEMA: MEDIDA**

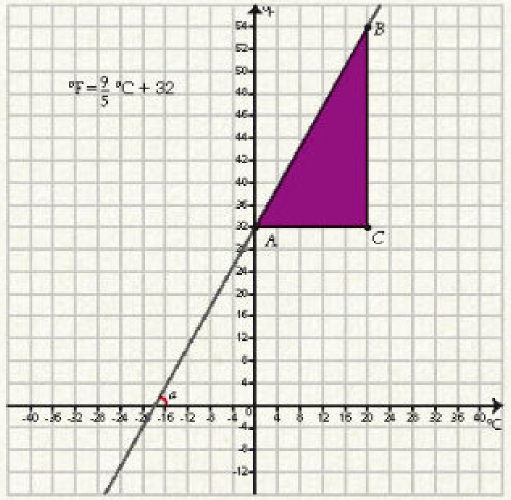
## Contenido 24

Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo.

### LO QUE SÉ

Resuelve las siguientes actividades de manera individual.

1. La siguiente gráfica muestra la relación que existe entre los grados Fahrenheit y los grados Celsius.

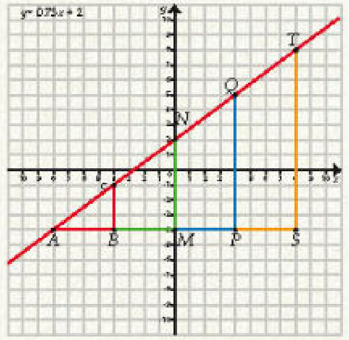



   a) ¿Cuál es el significado del número 32 en la gráfica? ______
   b) ¿Qué significa en la gráfica la fracción $\frac{9}{5}$? ______
   c) ¿Cuánto miden los catetos del triángulo rectángulo? ______
   d) ¿Cuál es el cociente del cateto opuesto entre el cateto adyacente? ______
   e) ¿Cuál es la coordenada de intersección de la gráfica con el eje horizontal? ______
   f) ¿Qué significa esta intersección? ______
   g) ¿Cuánto mide el ángulo $a$? ______

### PRACTICANDO LO APRENDIDO

Reunidos en equipos, analicen y resuelvan las siguientes situaciones.

1. En el estudio de un fenómeno, la relación entre dos variables se ha determinado mediante la función, $y = 0.75x + 2$. Su gráfica se muestra a continuación.




   a) ¿Cuánto mide el ángulo que forman los segmentos $AB$ y $AC$? ______
   b) ¿Cómo son entre sí los triángulos $ABC$, $AMN$, $APQ$ y $AST$? ______





- ¿Por qué? ______

   c) Tomando como referencia el ángulo que forman los segmentos $AB$ y $AC$, completen la siguiente tabla.

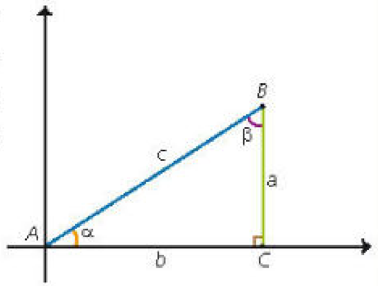
| Triángulo | Medida del cateto opuesto | Medida del cateto adyacente | Medida de la hipotenusa | $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$ | $\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $ABC$ | | | | | |
| $AMN$ | | | | | |
| $APQ$ | | | | | |
| $AST$ | | | | | |

   d) ¿Cómo son entre sí los cuatro cocientes de la razón $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$? ______
   - ¿Qué significado tiene esto? ______

   e) ¿Cómo son entre sí los cocientes $\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$, en cada uno de los cuatro casos? ______
   - ¿Qué significado tiene esto? ______

### EL RINCÓN MATEMÁTICO

Las razones que existen entre los lados de un triángulo rectángulo se llaman *funciones* o *razones trigonométricas*. Por ejemplo, la razón $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$ se llama función *seno*, mientras que la razón $\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$ se conoce como función *coseno*. Sus abreviaciones son: *sen* y *cos*, respectivamente.

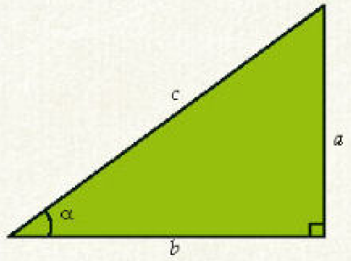



En este ejemplo es posible escribir las siguientes razones:

$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$ $\quad \cos \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$

$\text{sen } \beta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$ $\quad \cos \beta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$

2. Julissa y Salvador discuten sobre un desafío matemático. Ella afirma que si en un triángulo rectángulo se cumple que $\text{sen } \alpha = \frac{3}{5}$, entonces se puede obtener el perímetro de ese triángulo, pero Salvador dice que no. Él también afirma que en ese mismo triángulo sucede que $\text{sen } \alpha = \frac{6}{10}$, por lo que el perímetro no es el mismo que el anterior. A continuación se muestra un triángulo que sirve como modelo para esta situación.




   a) ¿Quién tiene la razón? ______

- Justifiquen su respuesta ______

b) ¿Cuánto mide la hipotenusa para Julisa? ______

c) Escriban cuánto mide el perímetro del triángulo de Julisa. ______

d) ¿Cuánto mide el ángulo ? ______

e) La longitud de la hipotenusa en el ejemplo que da Salvador, es: ______

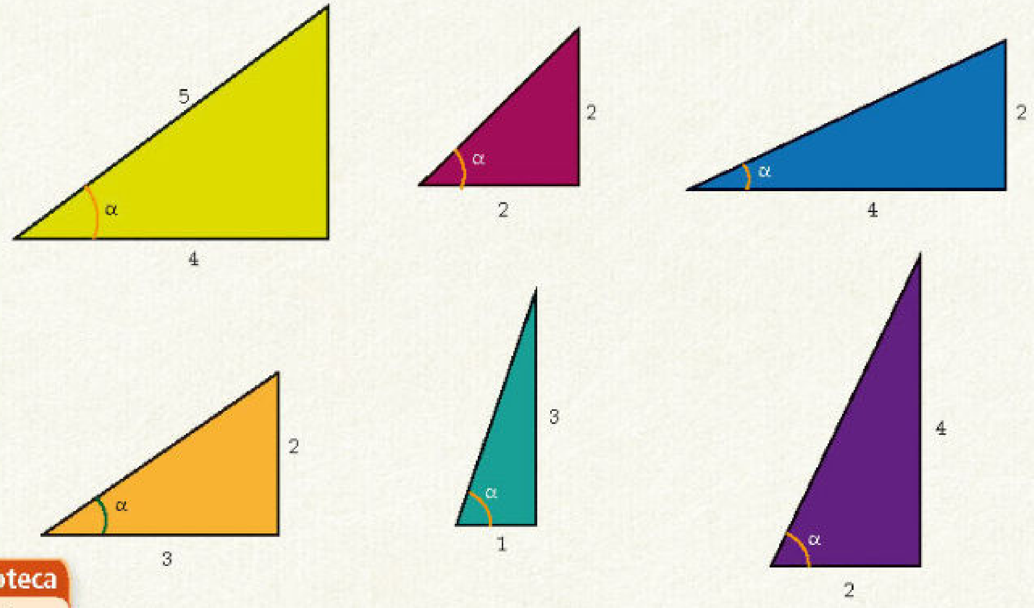
f) ¿Cuánto mide el perímetro del triángulo de Salvador? ______

g) El ángulo del triángulo de Salvador mide: ______

h) ¿Qué valor comparten el triángulo de Julissa y el de Salvador? ______

i) Expliquen por qué otros triángulos rectángulos también cuentan con la razón $sen\ \alpha = \frac{3}{5}$ y escriban tres ejemplos. ______

3. Usen una calculadora científica o la tabla trigonométrica que se encuentra en el Anexo al final de este libro para obtener las razones *sen* y *cos* del ángulo α, en cada uno de los siguientes triángulos. Aproximen hasta cuatro cifras decimales.




a) ¿Cómo resolvieron el primer triángulo? ______

b) ¿Qué relación hay entre el triángulo azul marino y el morado? ______

c) ¿Cuánto suman los ángulos α de los triángulos azul marino y morado? ______

d) ¿Cómo son entre sí el α del triángulo azul marino con el ángulo α del triángulo morado? ______

**Libroteca**

Si te preguntas qué son los ángulos agudos o qué es un triángulo rectángulo, y te gustaría entender mejor la geometría, te recomendamos leer:

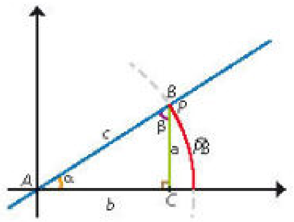
Louette, André, *El secreto de los números*, México, Porrúa, 2004. Puedes encontrarlo en la Biblioteca de Aula.





## EL RINCÓN MATEMÁTICO

Un ángulo se puede expresar en *grados* o *radianes*. En la ilustración, el ángulo α se puede medir con un transportador a partir del segmento *AP*, en el sentido opuesto al giro de las manecillas el reloj. Esta medida se expresa en *grados*, y puede llegar a medir lo mismo que una circunferencia, es decir, 360°.

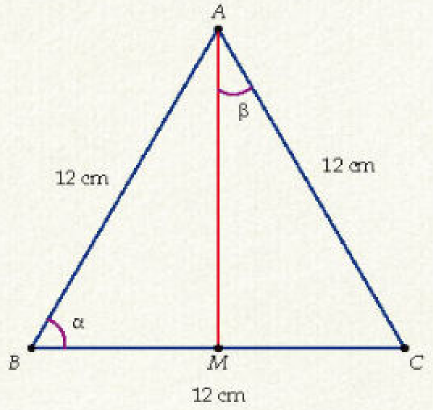



Por otra parte, a partir del segmento *AP*, el segmento *AB* determina el mismo ángulo α, pero éste puede relacionarse con el arco de la circunferencia que se muestra en la figura. En la ilustración este arco es $\overset{\frown}{PB}$, y es una fracción de la longitud total de la circunferencia. En radianes, esta longitud es 2*p* para cualquier circunferencia. En este caso se dice que la medición se expresa en *radianes*.

Cuando α = 90°, sólo se ha medido la cuarta parte de la circunferencia, es decir, $\frac{1}{4}$ de 2π. Si hacemos la conversión de grados a radianes, obtenemos que $90° = \frac{\pi}{2}$.

## PRACTICANDO LO APRENDIDO

1. Ahora, trabajando en parejas, analicen el siguiente triángulo equilátero, donde *M* es el punto medio del lado *BC*.




a) ¿Cuánto mide el segmento *AM*? ______

b) Escriban la medida del ángulo α. ______

c) ¿Cuánto mide el ángulo β? ______

d) Los ángulos α + β suman: ______

e) Expliquen qué razón trigonométrica usaron para calcular α. ______

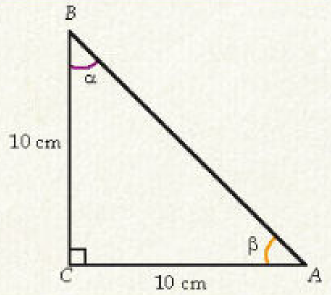
f) Expliquen qué razón trigonométrica usaron para calcular β. ______

g) Escriban cómo son entre sí *sen* α y *cos* β. ______

h) ¿Cómo son entre sí *cos* α y *sen* β? ______

i) Expliquen con sus propias palabras en qué consisten el seno y coseno de un ángulo. ______

2. Analicen el siguiente triángulo isósceles.




a) ¿Cuánto mide su hipotenusa? ______

b) El ángulo α mide: ______

c) ¿Cuánto mide el ángulo β? ______

d) Los ángulos α + β suman: ______

e) Escriban cómo son entre sí el *sen* α y *cos* β. ______

f) ¿Cómo son entre sí el *cos* α y *sen* β? ______

3. Con la ayuda de su profesor, reflexionen sobre las siguientes preguntas y escriban sus conclusiones, justificando todas sus respuestas.
   a) ¿Qué relación existe entre el seno de un ángulo y el coseno de su complemento?

   Describan un ejemplo.

   b) Expliquen por qué la medida del seno de un ángulo puede ser la misma para distintos triángulos rectángulos.

   Describan un ejemplo.

   b) Expliquen cómo se obtiene la tangente de un ángulo.

   Describan un ejemplo.

## EL RINCÓN MATEMÁTICO

Una herramienta importante para obtener las razones trigonométricas es la *tabla trigonométrica*, en el Anexo que se encuentra al final de este libro.

Supongamos que se desea obtener *sen* 36°, consultamos la tabla y ahí localizamos el valor buscado.

36° | *sen* 36° | *tan* 36°

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| .5934 | 34 | .5592 | .8290 | .6745 | 56 | .9774 |
| .6109 | 35 | .5736 | .8192 | .7002 | 55 | .9599 |
| .6283 | 36 | .5878 | .8090 | .7265 | 54 | .9425 |
| .6458 | 37 | .6018 | .7986 | .7536 | 53 | .9250 |
| .6632 | 38 | .6157 | .7880 | .7813 | 52 | .9076 |

36°, expresado en radianes | *cos* 36°

Según la tabla, *sen* 36° = 0.5878.

## TIC

Para complementar la información de este tema, puedes ingresar al sitio web disponible en: http://www.i-matematicas.com/recursos0809/bachillerato/trigonometria/, en donde encontrarás otra forma de cómo obtener las razones trigonométricas de un ángulo y ejercicios resueltos paso a paso. Comenta con tus compañeros y con el profesor tu experiencia al visitar esta página.

(Consulta: 5 de diciembre de 2016.)





## APLICANDO LO APRENDIDO

Analiza y responde las siguientes situaciones, trabajando en pareja.

1. Axel, Dérek y José, discuten acerca del siguiente problema: "¿Qué resultado se obtiene al multiplicar la tangente de un ángulo agudo por la tangente de su complemento?". Axel dice que el resultado es 0 y Dérek afirma que siempre se obtiene 1. José está convencido de que no se puede saber el resultado.
   a) Contesten quién tiene razón y por qué.
   b) Justifiquen su respuesta al inciso anterior explicándola mediante un ejemplo.

2. Omar desea construir un triángulo rectángulo con un ángulo agudo α = 0.7071, de manera que *sen* 0.7071. Con base en lo estudiado previamente, contesten las siguientes preguntas.
   a) ¿Debe construir un triángulo rectángulo escaleno?
      - ¿Por qué?
   b) ¿Debe construir un triángulo rectángulo equilátero?
      - ¿Por qué?

3. En la tabla trigonométrica que se muestra a continuación se señalan algunas columnas con flechas rojas y moradas. Analicen lo que indican las flechas y contesten lo siguiente.

| rad | deg | sen | cos | tan | deg | rad |
|---|---|---|---|---|---|---|
| .0000 | 00 | .0000 | 1.0000 | .0000 | 90 | 1.5707 |
| .0175 | 01 | .0175 | .9998 | .0175 | 89 | 1.5533 |
| .0349 | 02 | .0349 | .9994 | .0349 | 88 | 1.5359 |
| .0524 | 03 | .0523 | .9986 | .0524 | 87 | 1.5184 |
| .0698 | 04 | .0698 | .9976 | .0699 | 86 | 1.5010 |
| ... | | | | | | |
| .7330 | 42 | .6691 | .7431 | 1.1106 | 48 | .8378 |
| .7505 | 43 | .6820 | .7314 | 1.0724 | 47 | .8203 |
| .7679 | 44 | .6947 | .7193 | 1.0355 | 46 | .8029 |
| .7854 | 45 | .7071 | .7071 | 1.0000 | 45 | .7854 |
| | | cos | sen | tan | deg | rad |

   a) ¿Qué relación existe entre estas columnas?
   b) ¿En qué casos el resultado del seno y el coseno son iguales?
   c) ¿Qué argumento matemático permite justificar lo que sucede con los ángulos de 90° y 45°?

Comparen sus respuestas con las de otros compañeros, y con la ayuda de su profesor reflexionen sobre las relaciones trigonométricas que existen entre los lados de los triángulos estudiados en esta lección.

EJE: FORMA, ESPACIO Y MEDIDA

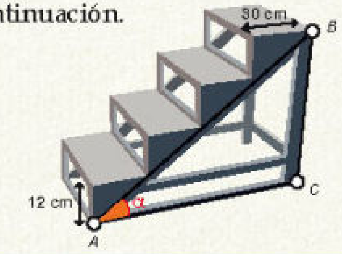
TEMA: MEDIDA

## Contenido 25

Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.

### LO QUE SÉ

1. Sergio es el diseñador de una fábrica de escaleras de aluminio. El modelo que propuso para este año es el que se muestra a continuación.




a) ¿Qué altura alcanza la escalera? __________

b) ¿Cuánto mide el ángulo α? __________

c) De acuerdo con la tabla trigonométrica, ¿cuál es el valor de sen α? __________

d) ¿Cuánto vale el cociente $\frac{BC}{AB}$? __________

2. La llanta de una bicicleta tiene 66 cm de diámetro, como se aprecia en la siguiente imagen.


a) ¿Qué distancia recorre al dar una vuelta completa sobre un plano recto? __________

b) ¿Cuánto mide su radio? __________

c) ¿Cuántas veces cabe la longitud del diámetro en la longitud de la circunferencia de la llanta? __________

d) ¿Cuántas veces cabe el radio de la llanta en la totalidad de su circunferencia? __________

e) Si una llanta tiene 1 m de radio, ¿cuánto mide su circunferencia? __________

f) Pensando en términos de radianes, ¿cuántas veces cabe π en la circunferencia? __________



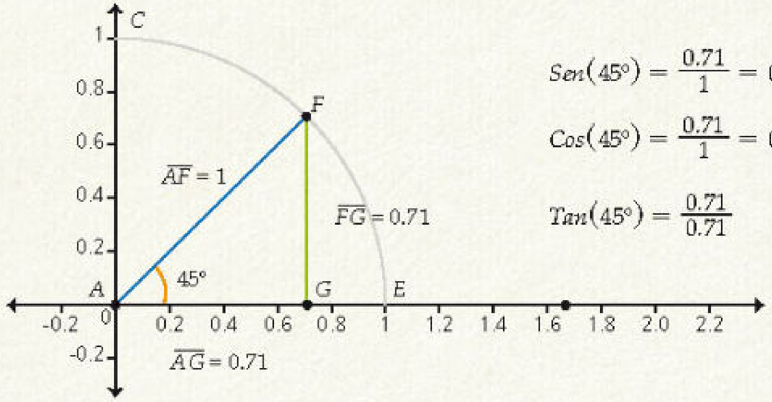


### TIC

Para enriquecer el tema de esta lección, te recomendamos descargar el documento: http://132.248.164.227/publicaciones/docs/apuntes_matematicas/15.%20Trigonometria.pdf y explores las ideas que se trabajan en las primeras tres páginas.
(Consulta: 5 de diciembre de 2016.)

### PRACTICANDO LO APRENDIDO

1. Analicen y respondan en parejas las siguientes preguntas.




$Sen(45°) = \frac{0.71}{1} = 0.71$

$Cos(45°) = \frac{0.71}{1} = 0.71$

$Tan(45°) = \frac{0.71}{0.71}$

a) El arco $CE$ pertenece a una circunferencia. ¿Cuánto mide el radio de esa circunferencia? __________

b) ¿Cuánto mide la hipotenusa? __________

c) Si $F$, que pertenece al arco $CE$, se desplaza a otro lugar, ¿cambia el valor de la hipotenusa del triángulo $AFG$? __________

¿Por qué? __________

d) ¿Pasa lo mismo con las medidas de los catetos? __________

Justifiquen su respuesta. __________

2. Basándose en la figura del inciso anterior, contesten lo que se les pide.

a) ¿Cuál es la amplitud del ángulo cuya tangente es 1? __________

b) ¿Cuáles son las coordenadas del punto $F$? __________

c) ¿Expliquen qué relación hay entre la abscisa de $F$ y el *sen* (45°)? __________

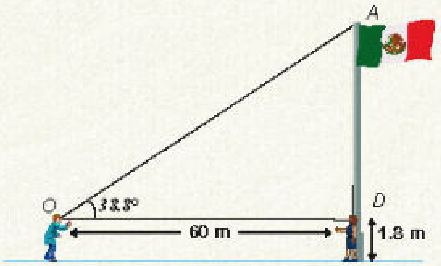
d) ¿Expliquen qué relación hay entre la ordenada de $F$ y el *sen* (45°)? __________

e) Si la abscisa de $F$ en cierto momento es 0.88, ¿cuál es el valor de su ordenada? __________

3. Usando una calculadora científica o la tabla trigonométrica que se encuentra en el Anexo de este libro, completen la siguiente tabla.

| Ángulo | | sen α | cos α | tan α |
|---|---|---|---|---|
| grados | radianes | | | |
| 0° | | | | |
| 30° | | | | |
| 45° | | | | |
| 60° | | | | |
| 90° | | | | |

4. Omar y David tienen la misma estatura, 1.8 m, y se encuentran separados por una distancia de 60 m. Omar quiere fotografiar a David, que se encuentra al pie de un astabandera, pero en ese momento gira la cámara 38.8° con respecto a la horizontal y logra enfocar la cúspide del asta, como se muestra en la siguiente imagen.




a) ¿Cuánto mide el lado $AD$? ______

Expliquen cómo encontraron ese valor. ______

b) ¿Cuánto mide de alto el astabandera? ______

c) ¿Cuál es la distancia entre $O$ y $A$? ______

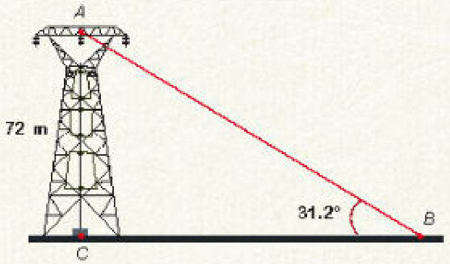
d) ¿Cuál es el perímetro del triángulo $OAD$? ______

Expliquen cómo calcularon ese dato. ______

e) ¿Cuánto mide el ángulo $OAD$? ______

f) ¿A qué distancia debe colocarse Omar de David para que el ángulo de elevación sea de 45°? ______

5. La torre eléctrica 4PR3+20, es la más alta de México y está instalada en Lomas de San Bernabé, Cuajimalpa.




a) ¿Cómo se puede calcular la longitud del lado $AB$? ______

b) ¿A qué distancia se encuentra la torre del punto $B$? ______

c) Usando funciones trigonométricas, calculen la longitud de la hipotenusa. ______

d) Expresen el *sen* 31.2° en forma de cociente y obtengan su valor. ______

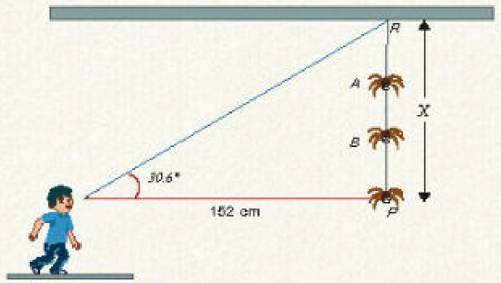
e) Expresen el *cos* 31.2° en forma de cociente y obtengan su valor. ______





f) ¿Cuánto es la *tan* 31.2°? ______

6. Un niño observa una araña que desciende del techo, como se muestra a continuación.




a) ¿Qué razón trigonométrica relaciona la distancia del niño a la araña, el ángulo de elevación y la variable $x$? ______

b) ¿Qué distancia descendió la araña? ______

c) Escriban una ecuación que relacione la hipotenusa $QR$, el ángulo de elevación y la variable $x$. ______

d) ¿Cuál es la longitud del segmento $QR$? ______

7. Analicen la figura anterior, observen que están marcadas las posiciones $A$ y $B$ de la araña, y que éstas permiten realizar más mediciones y cálculos con los lados y ángulos de la figura. Resuelvan los siguientes problemas y pidan ayuda a su profesor si les surgen dudas.

a) Si el ángulo de visión entre la posición $A$ y $B$ de la araña es de 9.6° y el ángulo $BQP$ mide 11.4°, ¿cuánto mide el ángulo $AQP$? ______

Expliquen detalladamente cómo encontraron la solución. ______

b) ¿Cuánto mide el ángulo $RQA$? ______

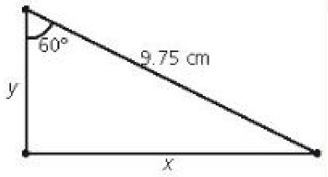
Expliquen la forma en que encontraron su respuesta. ______

En el triángulo $BQP$, ¿cuánto mide la distancia $BP$? ______

En el triángulo $AQP$, ¿cuánto mide la distancia $AP$? ______

¿Qué distancia recorrió la araña de la posición $A$ a la posición $B$?

## EL RINCÓN MATEMÁTICO




Resolver un triángulo rectángulo, es una actividad que consiste en encontrar una variable desconocida a partir de cierta información conocida. Veamos la siguiente imagen.

La razón *sen* 60° $= \frac{x}{9.75}$, permite obtener el valor desconocido de $x$, al despejarlo en la expresión: $x = 9.75$ *sen* 60°

Basta con sustituir el valor de *sen* 60° en la expresión anterior para obtener el valor de $x$.

Para obtener $y$, es necesario recurrir a resolver *cos* 60° $= \frac{y}{9.75}$, donde $y = 9.75$ *cos* 60°.

De esta manera, obtuvimos los valores de todos los lados y ángulos del triángulo rectángulo en cuestión.

### Matemáticas con otras ciencias

En el cuarto bloque de primer grado estudiaste la relación entre la circunferencia y su diámetro. A esta razón se le llama $\pi$.

Este concepto puede enriquecerse más. Por ejemplo, dibuja una circunferencia y sobre ella resalta un arco cuya longitud sea igual al radio. ¿Cuántos grados mide el ángulo central que abarca ese arco? ______

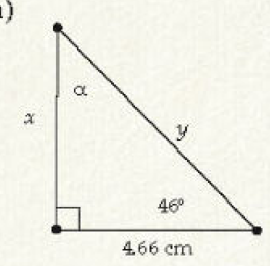
Prueba con otras dos circunferencias de radios distintos. ¿Se obtiene el mismo ángulo? ______ ¿Por qué crees que sucede esto? ______

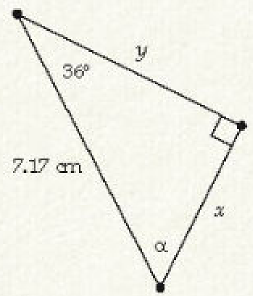
## Aplicando lo aprendido

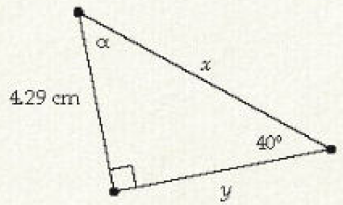
En parejas, analicen y respondan las siguientes cuestiones.

1. Calculen los valores faltantes usando las tablas trigonométricas del Anexo que se encuentra al final del libro.

a)

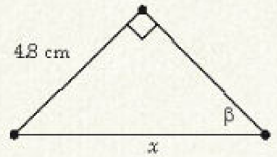


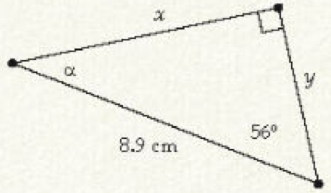



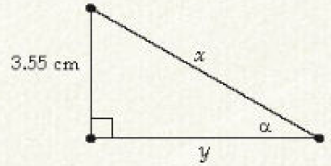




$x$ = ______ $x$ = ______ $x$ = ______
$y$ = ______ $y$ = ______ $y$ = ______
$\alpha$ = ______ $\alpha$ = ______ $\alpha$ = ______

b)




$x$ = ______ $x$ = ______ $x$ = ______
$\alpha$ = ______ $\alpha$ = ______ $\alpha$ = ______
$\beta$ = ______ $\beta$ = ______ $\beta$ = ______

### TIC

Para resolver triángulos de manera interactiva, entra a la página electrónica: http://www.colombiaaprende.edu.co/recursos/skoool/matematica_y_geometria/funciones_trigonometricas/index.html y relaciona lo que has aprendido en esta lección con los retos que se te presentan ahí. (Consulta: 5 de diciembre de 2016.)



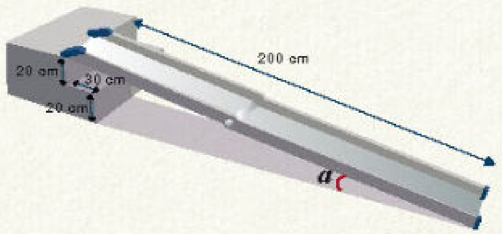


## Aplicando lo aprendido

En equipos, analicen y respondan lo que se indica.

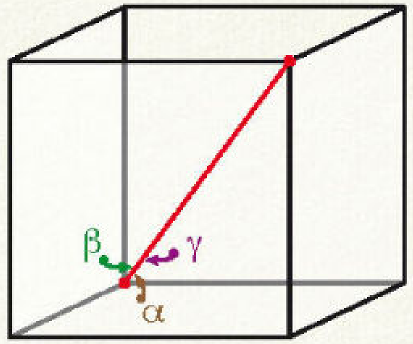
1. ¿Cuánto mide el ángulo de elevación de la siguiente rampa? ______

Describan el argumento matemático que justifica su procedimiento. ______



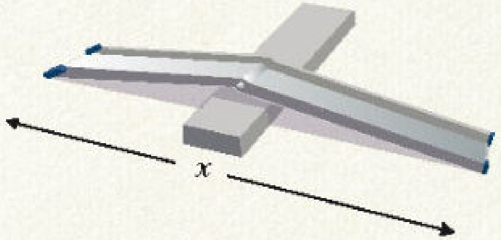

2. ¿Cuánto mide el ángulo que forma la diagonal de un cubo con respecto a las caras adyacentes a uno de los vértices de dicha diagonal? ______

Describan el argumento matemático que justifique su respuesta. ______




3. ¿Cuánto abarca la distancia $x$, si el ángulo de elevación de cada rampa es de 9° y cada rampa mide 80 cm? ______

Describan el argumento matemático que sustenta su procedimiento. ______




4. Con la ayuda de su profesor escriban una conclusión respecto a la manera de obtener las razones trigonométricas y comenten los distintos contextos en los que las razones seno, coseno y tangente, pueden ser una herramienta matemática para resolver problemas. ______

### Saber más...

Uno de los propósitos que tiene el gobierno de México es eliminar gradualmente los obstáculos del entorno físico para facilitar el acceso y uso de los espacios para personas con discapacidad, así como mejorar los servicios urbanos para los habitantes de esta gran ciudad. El *Manual Técnico de Accesibilidad* está diseñado para apoyar a los proyectos con criterios, especificaciones, gráficos para las adecuaciones de los espacios, que requieren las personas con discapacidad, adultos mayores, personas con movilidad limitada, con alguna limitación temporal y personas de talla baja.

FUENTE: Secretaría de Movilidad, recuperado de: http://www.libreacceso.org/downloads/Manual%20de%20Accesibilidad%20SEDUVI.pdf (Consulta: 5 de diciembre de 2016.)

EJE: MANEJO DE LA INFORMACIÓN

TEMA: PROPORCIONALIDAD Y FUNCIONES

## Contenido 26

Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa.

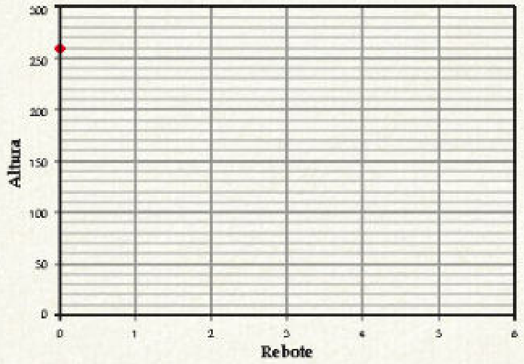
### LO QUE SÉ

Resuelve de manera individual los siguientes problemas.

1. Desde una altura de 260 cm, Emanuel deja caer una pelota de plástico y registra el tiempo en que alcanza su altura máxima después de cada rebote. La tabla de datos que obtuvo fue la siguiente.

| Rebote | Altura (cm) |
|---|---|
| 0 | 260 |
| 1 | 128 |
| 2 | 65 |
| 3 | |
| 4 | 15 |
| 5 | 8 |

a) Traza la gráfica que modela las alturas de los rebotes.




b) ¿Qué tipo de gráfica se obtiene, lineal o no lineal? ______

¿Por qué? ______

c) ¿Cuál es el valor aproximado de la altura alcanzada por la pelota en el rebote 3?

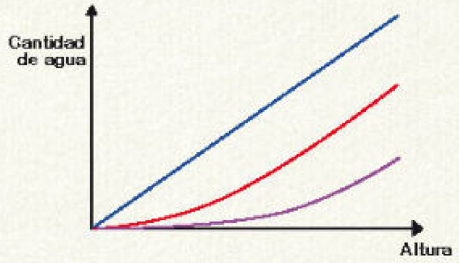
______

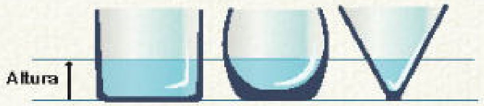




¿Por qué? ______

2. Se vierte agua en tres vasijas distintas y se compara el volumen del líquido a partir de la altura que alcanza en el recipiente.




a) ¿A qué recipiente corresponde cada una de las gráficas?

Azul ______

Roja ______

Violeta ______

b) ¿Cuál de las tres líneas corresponde a una función lineal? ______

Justifica tu respuesta. ______

### PRACTICANDO LO APRENDIDO

Reúnanse en parejas para resolver los siguientes problemas.

1. Un camión transporta bloques de hielo y cada bloque pesa 20 kg.

a) ¿Qué peso transporta el camión si lleva 5 bloques? ______

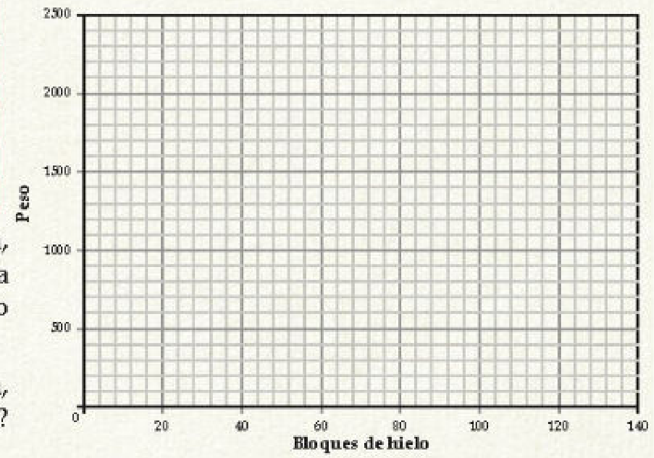
b) ¿Qué peso transporta el camión si lleva 8 bloques? ______

c) ¿Cuánto pesa la carga del camión si lleva 80 bloques? ______

d) Si el camión tiene una capacidad para 120 bloques, ¿qué peso trasladaría en este caso? ______

e) Completen la siguiente tabla.

| Bloques | Peso |
|---|---|
| 4 | |
| 7 | |
| 22 | |
| 50 | |
| 100 | |
| 120 | |




f) Con los datos de la tabla, elaboren una gráfica de la situación. Usen el plano cartesiano.

g) De acuerdo con la gráfica, ¿cuánto pesan 60 bloques?

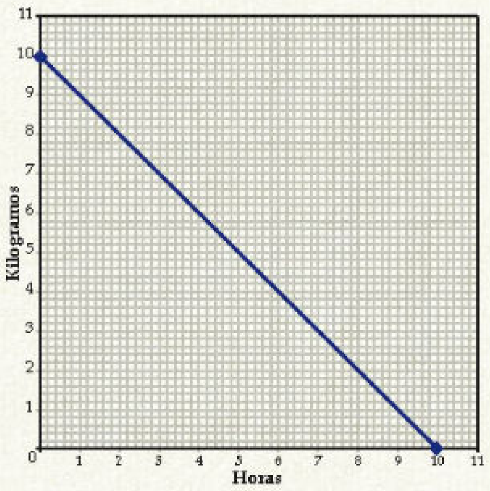
______

h) Con base en la gráfica, calculen la cantidad de bloques que pesarían 1 500 kg.

i) Si un camión soporta 3 500 kg, ¿cuántos bloques podría transportar?

Justifiquen matemáticamente su respuesta.

2. Un bloque de hielo de 10 kg, se coloca sobre una báscula y se mide la fusión, es decir, el deshielo que sufre, el cual se completa en 10 horas. Esta situación se modela en la siguiente gráfica.




a) ¿Cuánto pesaba el bloque cinco horas después de colocarlo en la báscula?

b) ¿Cuánto pesaba después de seis horas?

c) ¿Cuánto aumentó o disminuyó el peso entre las cinco y las seis horas?

d) ¿Cuánto aumentó o disminuyó el peso de las dos a las tres horas?

e) Expliquen qué sucede con el peso del bloque entre una hora y otra?

f) ¿Cuál es el cambio en el peso luego de cada hora transcurrida?

3. Una caseta telefónica cobra \$5 por el uso de la cabina y \$2.50 por cada minuto que transcurra la llamada.

a) ¿Cuánto cuesta realizar una llamada de 10 minutos?

- ¿Y por 11 minutos?

b) Expliquen cómo es la variación del precio minuto a minuto.

c) En su cuaderno, tracen la gráfica de la relación entre el precio y el tiempo transcurrido por llamada. ¿Qué tipo de relación es?

- Justifiquen matemáticamente las propiedades de esta gráfica.

d) ¿Cómo sería la gráfica si no se cobrara el uso de la caseta?

- Justifiquen su respuesta.

e) ¿Cómo sería la gráfica si el costo por el uso de la caseta se mantuviera constante, pero aumentara o disminuyera el precio por minuto transcurrido?

- Justifiquen su respuesta.





## EL RINCÓN MATEMÁTICO

La *razón de cambio* de una variable con respecto a otra, es la magnitud del cambio de una variable por unidad de cambio de la otra. De acuerdo con los ejemplos que se han usado en la lección, tendríamos que para el fenómeno de la fusión del hielo:

$$\text{razón de cambio} = \frac{\text{cambio en el peso del bloque}}{\text{tiempo transcurrido}}$$

Mientras que para la caseta telefónica, la razón de cambio es:

$$\text{razón de cambio} = \frac{\text{incremento en el precio}}{\text{tiempo transcurrido}}$$

Algunas razones de cambio son muy relevantes en la vida cotidiana. Por ejemplo, al crecimiento de la población con respecto al tiempo se le llama *tasa de crecimiento*, a la razón de cambio en la temperatura de un líquido se le llama *velocidad de enfriamiento*, la razón de cambio de la distancia recorrida en una unidad de tiempo se llama *velocidad*, pero la razón de cambio de la velocidad con respecto al tiempo se llama *aceleración*. A la razón de cambio de cierta cantidad de dinero con un interés determinado se le llama *tasa de interés*.

## PRACTICANDO LO APRENDIDO

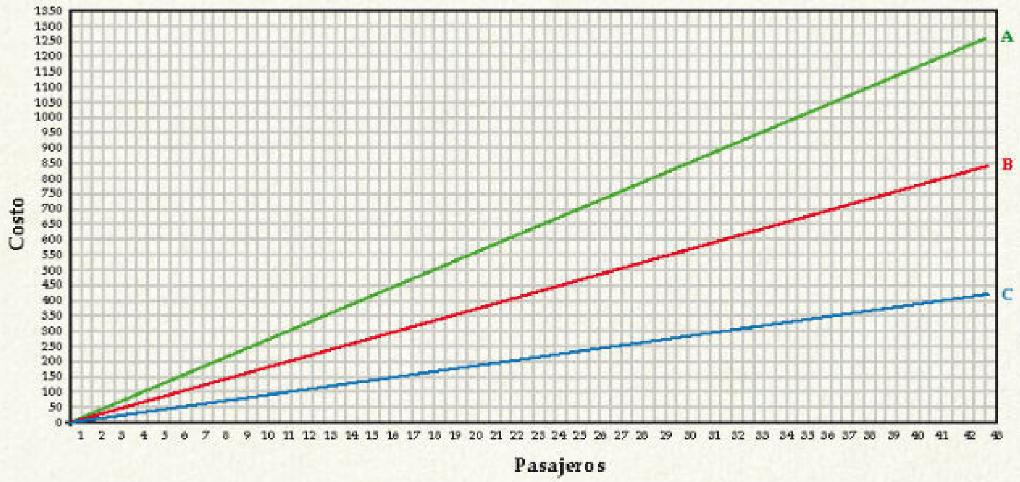
1. Trabajen en parejas y encuentren un ejemplo de su entorno cotidiano que involucre una cantidad que cambia proporcionalmente con respecto al tiempo. Intercambien la situación con la de otra pareja y con el ejemplo que reciban, realicen las siguientes actividades en su cuaderno de trabajo.

a) Elaboren una tabla que muestre algunos datos de esta relación.

b) Dibujen la gráfica de esta relación.

c) Encuentren la razón de cambio.

2. Para un viaje escolar, se pidió un presupuesto a tres compañías de autobuses y los costos por número de pasajeros investigados se muestran en la siguiente gráfica.



a) ¿Cuál es la razón de cambio en el costo por pasajero de la compañía *A*?

b) ¿Cuál es el costo por transportar 25 pasajeros en la compañía *B*?

- ¿Y por 30 pasajeros?

c) ¿Cuál es incremento en el costo de 25 a 30 pasajeros en la compañía *B*?

d) ¿Cuál es el costo por pasajero en la compañía *B*?

- Justifiquen su respuesta.

e) ¿Cuál es la razón de cambio de la compañía *B*?

f) ¿Cuál es el costo por pasajero en la compañía *C*?

- Justifiquen su respuesta.

g) ¿Cuál es la razón de cambio de la compañía *C*?

h) ¿Cómo es la razón de cambio de la compañía *A* con respecto a la compañía *B*?

- ¿Y de la compañía *A* con respecto a la *C*?
- ¿Y de la compañía *B* con respecto a la *C*?

3. Reúnanse con otra pareja para formar equipos de cuatro integrantes.

a) Analicen las respuestas de la actividad anterior. ¿Encontraron la misma razón de cambio para cada compañía?

- Expliquen las diferencias o similitudes.

b) Formulen una respuesta en equipo, a manera de conclusión, y justifiquenla matemáticamente.

4. En una lluvia de ideas grupal y con la guía del profesor, respondan las siguientes preguntas.

a) Si la razón de cambio fuera la misma para las tres compañías, ¿cómo serían las gráficas?

b) ¿Cómo serían entre sí las pendientes de las gráficas?

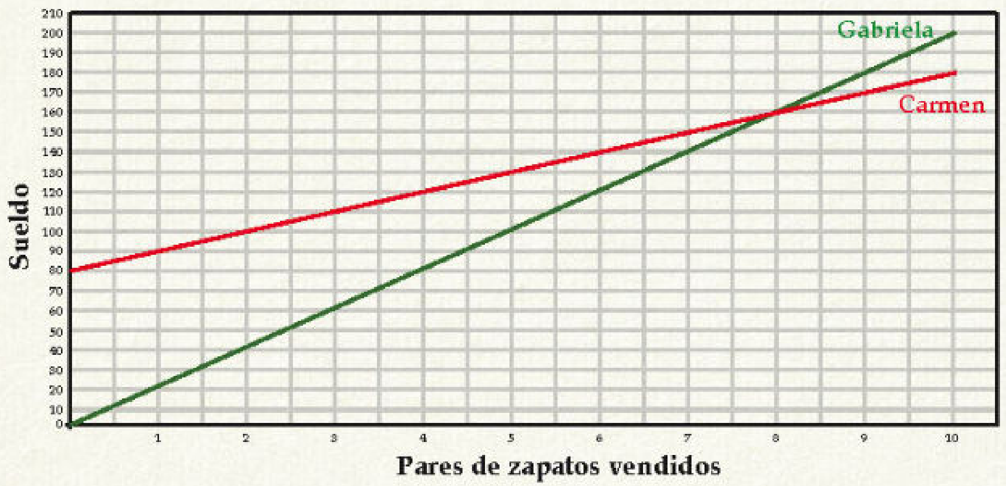
c) Escriban una conclusión sobre la relación que existe entre la razón de cambio y la pendiente de una recta.





## Aplicando lo aprendido

1. Observen las gráficas de los sueldos de Gabriela y Carmen. Ellas trabajan en una zapatería y reciben un pago diario, dependiendo de la cantidad de pares de zapatos vendidos.




a) Si un día no se vendió ningún par de zapatos, ¿cuál fue el pago para Gabriela?

b) Si otro día no se vendió ningún par de zapatos, ¿cuál fue el pago para Carmen?

c) Cuando se venden ocho pares, ¿quién recibe más paga?

- ¿Por qué?

d) ¿Cuál es la razón de cambio de la gráfica del sueldo de Gabriela?

- ¿Y la razón de cambio de la gráfica del sueldo de Carmen?

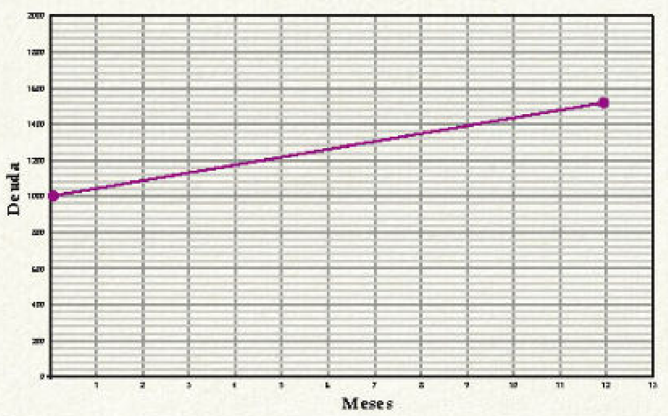
e) ¿Cuál es la pendiente de la recta que representa el sueldo de Gabriela?

f) ¿Cuál es la pendiente de la recta que representa el sueldo de Carmen?

TIC

Para complementar lo explorado en esta lección, visita la página web disponible en: http://www.bunam.unam.mx/mat_apoyo/MaestrosAlumnos/mApoyo/01/Unidad_2/a10u2t02p07.html
(Consulta: 5 de diciembre de 2016.)
Revisa los conceptos que se explican ahí y resuelve los problemas que se proponen.

2. Julia ha pedido un préstamo al banco y le cobrarán cierto interés mensual de acuerdo con la siguiente gráfica.




a) ¿Cuánto dinero pidió Julia de préstamo? ______

b) ¿Cuánto tendrá que pagar de interés si paga hasta el décimo mes? ______

c) ¿Cuál es la tasa de interés que pagará Julia? ______

- Argumenten matemáticamente el valor de la tasa de interés encontrada. ______

d) ¿Cuál es la ecuación de la recta? ______

e) ¿Cuál es la razón de cambio de la gráfica? ______

3. Comparen en forma grupal sus opiniones respecto a la relación que existe entre la razón de cambio de una gráfica y la pendiente de la misma, luego contesten lo siguiente.

a) Describan esa relación. ______

b) Ejemplifiquen la propiedad anterior con los ejemplos de las actividades 4, 7 y 10. ______

**Matemáticas con otras ciencias**

Usa lo aprendido en esta lección para reinterpretar el tipo de relaciones entre la variación de la concentración de una mezcla (porcentaje en masa y volumen) y sus propiedades que estudiaste en el bloque 1 de la asignatura de Ciencias 3, Química.

Usa algunos de los ejemplos revisados ahí y contesta, ¿qué tipo de gráficas se obtienen? Argumenta matemáticamente las propiedades de esas gráficas.





**EJE: MANEJO DE LA INFORMACIÓN**

**TEMA: ANÁLISIS Y REPRESENTACIÓN DE DATOS**

## Contenido 27

Medición de la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Análisis de las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de dispersión.

### LO QUE SÉ

Resuelve de manera individual los siguientes problemas.

1. Se realizó una encuesta en el salón de un grupo sobre las preferencias académicas para el nivel bachillerato. Las respuestas fueron las siguientes: *preparatoria, CECyT, Conalep, CCH preparatoria, preparatoria, preparatoria, CECyT, preparatoria, preparatoria, CCH, CECyT, CCH, CECyT, preparatoria, preparatoria, CCH, CCH, CECyT, CCH.*

a) Con base en la información, completa la siguiente tabla.

| Institución | Preferencia (%) |
|---|---|
| Preparatoria | |
| CCH | |
| CECyT | |
| Conalep | |

b) Elabora en tu cuaderno una gráfica que permita presentar claramente las preferencias académicas de los encuestados.

2. Durante cinco bimestres, Juan y José obtuvieron las siguientes calificaciones.

Juan: 5, 6, 5, 7, 10

José: 9, 10, 9, 10, 10

a) ¿Cuál es el promedio de Juan? ______

b) ¿Cuál es el promedio de José? ______

c) ¿Cuál es la calificación más alta de José? ______

- ¿Y la más baja? ______

d) ¿Cuál es la calificación más alta de Juan? ______

- ¿Y la más baja? ______

3. Las calificaciones de Pedro en los primeros cuatro bimestres de matemáticas son 6, 8, 10 y 8. Al preguntar por la calificación del último bimestre, su maestra dijo: "tienes 8.2 de promedio en los cinco bimestres". ¿Qué calificación obtuvo en el quinto bimestre? ______

## PRACTICANDO LO APRENDIDO

Reúnanse en equipos para realizar las siguientes actividades.

1. Se preguntó a los alumnos de dos grupos de 20 estudiantes cada uno, cuántos hermanos hay en su familia, incluyéndose ellos. Las respuestas fueron las siguientes.
   Grupo *A*: 3, 1, 2, 2, 2, 1, 3, 2, 2, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 2, 3.
   Grupo *B*: 1, 4, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 5, 2, 1, 1, 4, 1, 4, 1, 1, 1, 5, 1.

   a) ¿Cuál es el promedio de hermanos del grupo *A*? __________
   b) Escriban cuál es el promedio de hermanos del grupo *B*. __________
   c) ¿Qué diferencia existe entre los promedios de los dos grupos? __________
   d) ¿Cuál es la mayor cantidad de hermanos que se tiene en el grupo *A*? __________
   e) ¿Cuál es la menor cantidad de hermanos que se tiene en el grupo *A*? __________
   f) Escriban la mayor cantidad de hermanos que se tiene en el grupo *B*. __________
   g) ¿Cuál es la menor cantidad de hermanos que se tiene en el grupo *B*? __________
   h) ¿Cuántos datos hay entre el máximo y el mínimo de los valores del grupo *A*? __________
   i) ¿Cuántos datos hay entre el máximo y el mínimo de los valores del grupo *B*? __________
   j) ¿Qué diferencia existe entre estos valores? __________
   k) Expliquen cómo ayuda esta información para comparar a los dos grupos. __________

2. Utilicen los datos de los grupos *A* y *B* de la actividad anterior para completar las siguientes tablas. En la segunda columna escriban el valor absoluto de la diferencia que hay entre cada dato y el promedio.

| Grupo A | | | |
|---|---|---|---|
| Número de hermanos x | Distancia entre x y $\bar{x}$ | Número de hermanos x | Distancia entre x y $\bar{x}$ |
| 3 | $\lvert 3-2\rvert = 1$ | 1 | |
| 1 | $\lvert 1-2\rvert = 1$ | 2 | |
| 2 | | 3 | |
| 2 | | 1 | |
| 2 | | 2 | |
| 1 | | 3 | |
| 3 | | 1 | |
| 2 | | 2 | |
| 2 | | 2 | |
| 2 | | 3 | |

| Grupo B | | | |
|---|---|---|---|
| Número de hermanos x | Distancia entre x y $\bar{x}$ | Número de hermanos x | Distancia entre x y $\bar{x}$ |
| 1 | | 1 | |
| 4 | | 1 | |
| 1 | | 4 | |
| 2 | | 1 | |
| 1 | | 4 | |
| 1 | | 1 | |
| 2 | | 1 | |
| 1 | | 1 | |
| 5 | | 5 | |
| 2 | | 1 | |

   a) ¿Qué significa encontrar la distancia entre x y $\bar{x}$? __________
   b) ¿Qué significa la expresión $\lvert 3-2\rvert = 1$? __________
   - ¿Por qué $\lvert 1-2\rvert = 1$? __________

   c) Obtengan el promedio de los resultados de la segunda columna de ambas tablas.
   d) ¿Cuál es el promedio en *A*? __________
   e) ¿Cuál es el promedio en *B*? __________
   f) ¿Cuál de los dos grupos tiene el mayor promedio? __________





## EL RINCÓN MATEMÁTICO

La *variabilidad* o *dispersión* de un conjunto de datos puede medirse a través de la *desviación media*, que consiste en obtener el promedio de las distancias que hay entre cada dato y la **media**.

Otra medida de variabilidad o dispersión es el *rango*, que se define como la diferencia entre el mayor y el menor de los datos.

Un ejemplo para tener claros estos conceptos es el siguiente. Suponiendo que se comparan los salarios de dos grupos de personas, se tiene el grupo 1, en el que cada integrante gana a la semana \$500, \$400, \$500 y \$2 000, respectivamente. Mientras que en el grupo 2 los salarios son de \$800, \$850, \$900 y \$800.

En promedio, ambos grupos ganan lo mismo, pero el rango en el grupo 1 es de \$1 600, mientras que en otro grupo es sólo de \$100. Por otra parte, la desviación media del grupo 1 es de \$450 y la del grupo 2 es de sólo \$37.5. Es decir, que en el grupo 1 hay más variabilidad que en el grupo 2. ¿A qué grupo conviene entrar a trabajar? La mejor decisión es la fundamentada en las matemáticas.

**Glosario**

**Media.** Es una medida de tendencia central, que es igual al promedio de los datos. Su símbolo es $\bar{x}$.

3. Israel, Carlos y Benjamín son los mejores jugadores de baloncesto de una liga. Se tiene que elegir al mejor jugador para darle el título de Mejor Jugador del Torneo. Los puntos que han anotado en los 20 partidos jugados son los siguientes.

| Partido | Israel | Carlos | Benjamín |
|---|---|---|---|
| 1 | 12 | 18 | 0 |
| 2 | 10 | 8 | 2 |
| 3 | 11 | 6 | 6 |
| 4 | 11 | 10 | 4 |
| 5 | 10 | 8 | 6 |
| 6 | 12 | 16 | 10 |
| 7 | 9 | 7 | 19 |
| 8 | 12 | 14 | 12 |
| 9 | 12 | 3 | 8 |
| 10 | 10 | 7 | 20 |
| 11 | 9 | 9 | 6 |
| 12 | 9 | 7 | 12 |
| 13 | 12 | 6 | 20 |
| 14 | 11 | 18 | 12 |
| 15 | 12 | 8 | 14 |
| 16 | 11 | 6 | 18 |
| 17 | 12 | 15 | 20 |
| 18 | 13 | 14 | 10 |
| 19 | 10 | 20 | 10 |
| 20 | 12 | 20 | 11 |

a) A simple vista, ¿quién merece el premio? ____________________
- ¿Por qué? ____________________

b) ¿Cuál es el promedio de puntos que anotaron por partido?
Israel: ____________________
Carlos: ____________________
Benjamín: ____________________

c) ¿Es suficiente este dato para establecer un ganador? ____________________
- ¿Por qué? ____________________

d) ¿Cuál es el *rango* de puntos por jugador?
Israel: ____________________
Carlos: ____________________
Benjamín: ____________________

e) Si el dato anterior sirviera para establecer el criterio para declarar un ganador, ¿quién sería? ____________________

f) ¿Cuál es la desviación media de cada jugador?
Israel: ____________________
Carlos: ____________________
Benjamín: ____________________

g) ¿Qué significa la desviación media en este contexto? ____________________

h) ¿Quién fue el jugador más consistente del torneo? ____________________

4. Analicen la siguiente lista de números.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Lista A** | 6 | 10 | 7 | 10 | 6 | 8 | 8 | 6 | 10 | 9 |
| **Lista B** | 8 | 7 | 7 | 10 | 9 | 8 | 9 | 6 | 8 | 8 |
| **Lista C** | 7 | 8 | 10 | 6 | 9 | 9 | 8 | 7 | 10 | 6 |

a) ¿Qué lista tiene el promedio más alto? ____________________

b) ¿Qué lista tiene el menor rango? ____________________

c) ¿Cuál tiene la menor desviación media? ____________________

d) ¿Qué lista presenta mayor dispersión? ____________________

5. Una maestra registró el número de inasistencias de tres grupos en un periodo de 12 días, en la tabla que se muestra a continuación.

| Día | Inasistencias | | |
|---|---|---|---|
| | A | B | C |
| 1 | 3 | 3 | 3 |
| 2 | 1 | 1 | 3 |
| 3 | 2 | 2 | 1 |
| 4 | 3 | 1 | 3 |
| 5 | 1 | 3 | 2 |
| 6 | 2 | 2 | 1 |

| Día | Inasistencias | | |
|---|---|---|---|
| | A | B | C |
| 7 | 3 | 2 | 1 |
| 8 | 1 | 1 | 3 |
| 9 | 1 | 2 | 1 |
| 10 | 2 | 3 | 1 |
| 11 | 3 | 2 | 3 |
| 12 | 2 | 2 | 2 |





a) Con base en la información del registro, completen la siguiente tabla:

| Grupo | Promedio | Rango | Desviación media |
|---|---|---|---|
| A | | | |
| B | | | |
| C | | | |

b) En el siguiente recuadro elaboren las gráficas de barras que indiquen la frecuencia del número de faltas por día de cada grupo.

c) ¿Qué relación hay entre las gráficas y la desviación media de cada grupo? ____________________

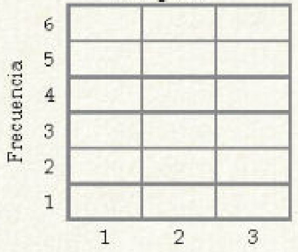
d) ¿Qué características presenta cada gráfica? ____________________

e) ¿Cómo se puede estimar la desviación media a partir de su gráfica? Expliquen cada caso.
- Cuando la gráfica es como una "V". ____________________
- Cuando la gráfica es uniforme. ____________________
- Cuando la gráfica es como una "V" invertida. ____________________

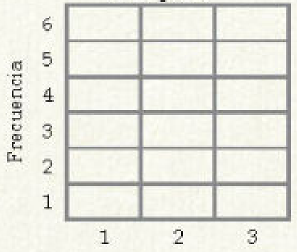
6. Ahora tomemos los datos del ejercicio 4 para realizar las siguientes actividades.

a) Elaboren las gráficas de frecuencias para los datos de las listas de números.

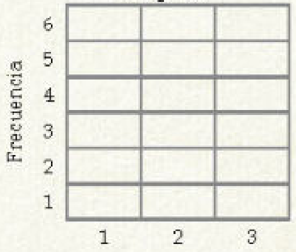
Grupo A




Grupo B




Grupo C

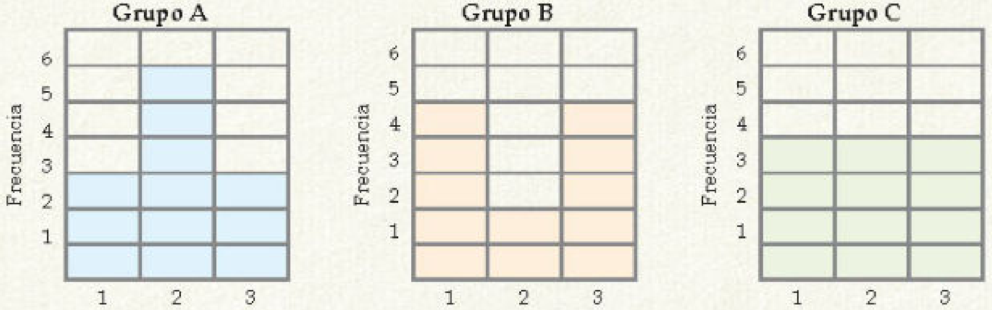


b) Completen la tabla.

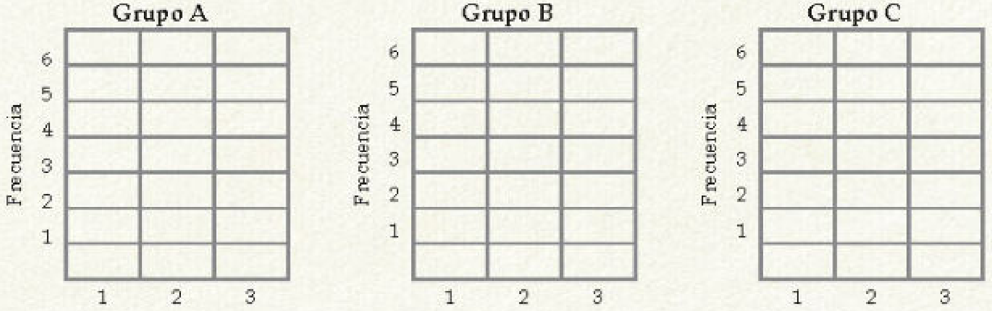
| Grupo | Promedio | Rango | Desviación media |
|---|---|---|---|
| A | | | |
| B | | | |
| C | | | |

c) ¿Qué relación observan entre las gráficas y la desviación media de cada lista?

7. Analicen las siguientes gráficas.




a) Dibujen una gráfica, conservando el mismo promedio de los tres ejemplos, con los mismos datos y distinta frecuencia, pero con menor desviación media que cualquiera de las tres mostradas.




b) ¿Qué diferencias hay entre estas gráficas y las originales?

Comparen sus resultados con los de otros compañeros y con la ayuda de su profesor reflexionen acerca de la relación que existe entre el aspecto de una gráfica y la desviación media de los datos.

TIC

En la página electrónica disponible en: http://www.akula.com/es/calculadoras/estadistica/desviacion-media/ encontrarás una calculadora para obtener el tamaño de la población, la media aritmética y la desviación media de un conjunto de datos que puedes ingresar manualmente.

Usa la calculadora para verificar tus resultados a las actividades de esta lección.

(Consulta: 5 de diciembre de 2016.)





### Matemáticas con otras ciencias

En el bloque 2 de tu libro de Educación Física, desarrollaste actividades como proponer códigos de ética para el buen desarrollo de los juegos y deportes, y así contribuir a la convivencia con los demás.

En estas actividades, las matemáticas pueden representar una herramienta para diseñar, por ejemplo, criterios de desempate en un torneo o competencia, de acuerdo con las medidas de dispersión que genere la actividad representada en una serie de datos.

Propongan a otro equipo tres series de datos que representen los resultados de tres equipos distintos en un torneo. Las tres series deben tener el mismo promedio, y el equipo que recibe los datos debe determinar el equipo ganador a través de la desviación media.

## APLICANDO LO APRENDIDO

1. La siguiente tabla muestra el tipo de cambio del dólar en el mes de mayo de 2013.

| Día | Tipo de cambio | Día | Tipo de cambio |
|---|---|---|---|
| 02 | 12.1456 | 09 | 12.0393 |
| 03 | 12.1756 | 10 | 11.9807 |
| 06 | 12.0851 | 13 | 12.1094 |
| 07 | 12.1074 | 14 | 12.1448 |
| 08 | 12.0733 | 15 | 12.1485 |

a) ¿Cuál es el promedio del tipo de cambio del dólar en este periodo?

b) ¿Cuál es el rango de esos valores?

c) ¿Cuál es la desviación media?

2. Investiga la fluctuación del dólar en los últimos 10 días y llena la siguiente tabla.

| Día | Tipo de cambio | Día | Tipo de cambio |
|---|---|---|---|
| 01 | | 06 | |
| 02 | | 07 | |
| 03 | | 08 | |
| 04 | | 09 | |
| 05 | | 10 | |

a) ¿Cuál es el promedio del tipo de cambio del dólar en este periodo?

b) ¿Cuál es el rango de los valores?

c) ¿Cuál es la desviación media?

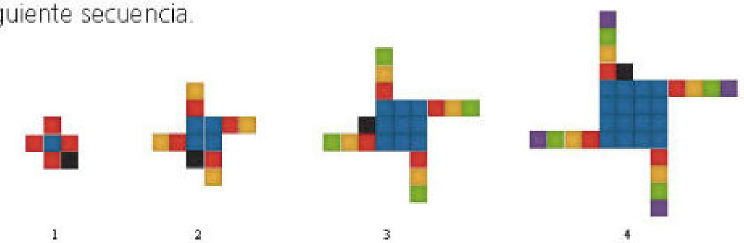
d) ¿De qué otra forma se puede resolver el problema?

e) Con la ayuda de su profesor, justifiquen matemáticamente en cuál de los dos periodos la fluctuación del dólar frente al peso tuvo mayor variabilidad.

Comparen sus respuestas con las de otros compañeros, y con la ayuda de su profesor comprueben que sus resultados sean correctos.

## I. Bloques de colores

Observa la siguiente secuencia.




1. ¿Cuántas piezas en total forman la figura?
   a) 25 b) 26 c) 45 d) 46
2. Escribe la expresión general de esta secuencia. ______
3. ¿Cuántas piezas tendrá la figura 10 de esta secuencia?
   a) Piezas negras: ______
   b) Piezas azules: ______
   c) Piezas rojas: ______
   d) Piezas naranja: ______
   e) Piezas verdes: ______

## II. Sólido de revolución

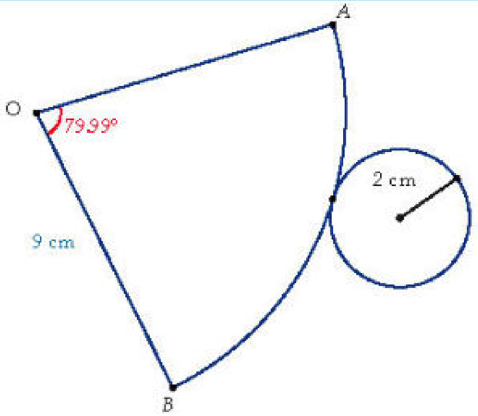
Analiza el siguiente sólido de revolución.

1. Traza la generatriz. ______
2. Describe las características de las líneas que forman esta generatriz. ______

## III. Desarrollo plano

Analiza el siguiente desarrollo plano y contesta lo siguiente.

1. ¿Cuánto tiene que medir el arco *AB*?
   a) 2 3 π 3 2
   b) 2 3 π 3 4
   c) 4 3 π 3 4
   d) 4 3 π 3 8



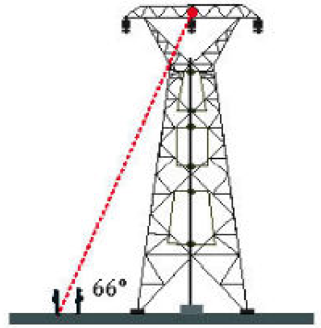







## IV. La torre de luz

Mariana está parada a 20 m de la base de una torre de luz y desde ahí observa el punto más alto levantando la mirada en un ángulo de 66°.




1. ¿Qué razón trigonométrica permite calcular la longitud de un tensor que sostiene la torre desde su punto más alto hasta donde se encuentra Mariana?
   a) *sen* 66° b) *cos* 66° c) *tan* 66°
2. ¿Cuánto mide la altura de la torre?
   a) 8.13 m b) 44.91 m c) 18.27 m d) 46.66 m

## V. La cisterna cúbica

Una cisterna cúbica que mide 2 m por cada lado se llena de manera que la altura del nivel del agua aumenta 1 cm cada minuto.

1. ¿Cuál es la razón de cambio de la altura del agua con respecto al tiempo? ______
   a) Justifica matemáticamente tu respuesta. ______

## VI. El museo

La entrada a un museo cuesta $40 y se cobra $10 por cada fotografía que se tome en el lugar.

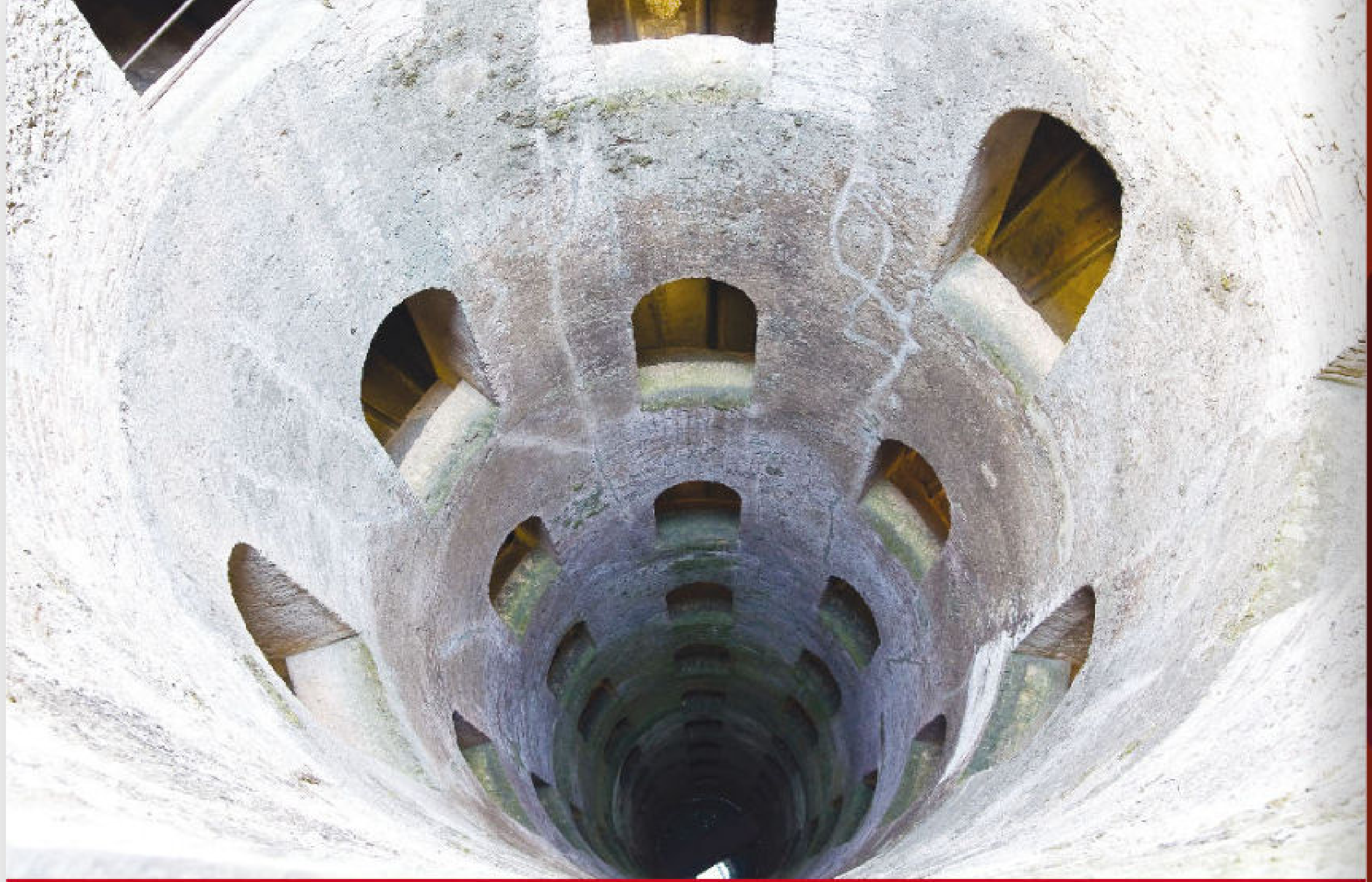
1. Escribe una expresión que permita saber cuánto se pagará por 1, 2, 3 o cualquier cantidad de fotografías. ______
2. ¿Qué término indica la pendiente en la expresión que encontraste? ______
3. ¿Qué término indica la ordenada al origen en la expresión que encontraste? ______

## VII. El proyecto

Para ingresar a un proyecto, varios aspirantes compitieron en 10 pruebas. En la tabla siguiente se muestran los resultados de los tres mejores.

| Prueba | Mariana | Gabriela | Francisco |
|---|---|---|---|
| A | 8 | 9 | 10 |
| B | 9 | 8 | 6 |
| C | 9 | 10 | 6 |
| D | 8 | 9 | 7 |
| E | 10 | 7 | 9 |
| F | 9 | 8 | 9 |
| G | 8 | 7 | 10 |
| H | 8 | 10 | 9 |
| I | 9 | 8 | 10 |
| J | 7 | 9 | 9 |

1. Explica quién de los tres debe ingresar al proyecto y justifica matemáticamente tu respuesta. ______



## Competencias que se favorecen:

- Resolver problemas de manera autónoma.
- Comunicar información matemática.
- Validar procedimientos y resultados.
- Manejar técnicas eficientemente.



# BLOQUE 5

### Aprendizajes esperados

- Resuelve y plantea problemas que involucran ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones y ecuaciones de segundo grado.
- Resuelve problemas que implican calcular el volumen de cilindros y conos o cualquiera de las variables que intervienen en las fórmulas que se utilicen. Anticipa cómo cambia el volumen al aumentar o disminuir alguna de las dimensiones.
- Lee y representa, gráfica y algebraicamente, relaciones lineales y cuadráticas.
- Resuelve problemas que implican calcular la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

EJE: SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO
TEMA: PATRONES Y ECUACIONES

## Contenido 28

Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulación de problemas a partir de una ecuación dada.

### LO QUE SÉ

Resuelvan en equipos los siguientes problemas.

1. Caperucita Roja se dirige a casa de su abuelita y a cada segundo avanza medio metro; después de 15 segundos, un lobo la huele y sale tras ella desde el punto donde Caperucita comenzó su camino, avanzando a una velocidad de 2/3 de metro cada segundo. Después de cinco segundos, un cazador ve al lobo y sale tras él desde el mismo punto, recorriendo 6/8 de metro, cada segundo.

   a) Hagan un estimado y sin realizar cálculos contesten, ¿quién alcanzará primero a quién, el cazador al lobo o el lobo a Caperucita? ____________

   b) Completen la siguiente tabla calculando la distancia que cada personaje recorre.

| Segundos | Recorrido de Caperucita | Recorrido del lobo | Recorrido del cazador |
|---|---|---|---|
| 0 | | | |
| 1 | | | |
| 2 | | | |
| 3 | | | |
| 5 | | | |
| 10 | | | |
| 15 | | | |
| 20 | | | |
| 25 | | | |
| 30 | | | |

   c) Con la ayuda de su profesor escriban una ecuación que exprese los recorridos de cada uno de estos personajes con respecto al tiempo.

   Recorrido de Caperucita: ____________

   Distancia que recorrió el lobo: ____________

   Recorrido del cazador: ____________

   d) ¿Quién avanza más lento? ____________

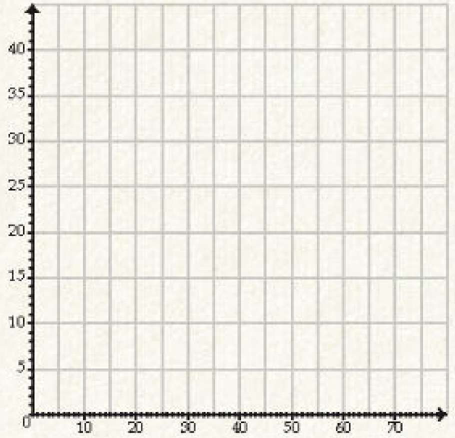
   e) ¿Quién de los tres se desplaza más rápido? ____________

   f) ¿En qué parte de la ecuación notan esta diferencia en la velocidad? ____________





   g) Grafiquen en el siguiente plano, con diferentes colores, cada una de las expresiones que encontraron.




   h) ¿Qué tipo de líneas obtuvieron? ____________

   i) En la gráfica, ¿cómo se dan cuenta cuando alguien alcanza a quien persigue? ____________

   j) ¿El cazador alcanza al lobo o el lobo a Caperucita? ____________

   k) Comparando la estimación inicial que hicieron y los resultados obtenidos, ¿sucedió lo que esperaban? Justifiquen su respuesta. ____________

**Libroteca**

Para fomentar tu gusto por las matemáticas te recomendamos leer el libro:

Taha, Malba, *El hombre que calculaba*, México, Limusa-Noriega, 2002. Puedes encontrarlo en los Libros del Rincón o en la Biblioteca de Aula.

### PRACTICANDO LO APRENDIDO

Resuelvan en parejas los siguientes problemas.

1. En el problema de Caperucita de la sección anterior, cada una de las ecuaciones que encontraron son ecuaciones lineales y permiten contestar las siguientes preguntas.

   a) ¿Qué distancia lleva recorrida Caperucita a los 10 segundos? ____________

   b) ¿Cuál es el recorrido que lleva Caperucita cuando sale el cazador? ____________

   c) ¿Cuánto ha avanzado el lobo cuando sale el cazador? ____________

   d) ¿A qué distancia se encuentra el lobo de Caperucita cuando sale el cazador? ____________

2. Revisen la gráfica que hicieron en la sección anterior y contesten lo que se les pide.

   a) ¿En cuántos puntos se intersecan las tres líneas graficadas? ____________

   b) Escriban las coordenadas de los puntos del inciso anterior. ____________

   c) Considerando los puntos anteriores, contesten, ¿en cuánto tiempo el lobo alcanza a Caperucita? ____________

   d) ¿En cuánto tiempo el cazador alcanza al lobo? ____________

## EL RINCÓN MATEMÁTICO

Una *función lineal* representada en una tabla, tiene como principal característica que los cambios en la función con respecto a los cambios de la variable, son constantes. Por ejemplo, en el problema de Caperucita se puede comprobar esto observando que la razón de la distancia entre el tiempo siempre arroja el mismo resultado en cualquier punto o en cualquier tiempo, debido a que es constante la variación que tienen. Esta situación ocurre con cualquiera de los tres personajes del problema.

### Saber más...

Grigori Perelmán.

Grigori Perelmán nació en San Petersburgo, en junio de 1966. A los diez años se integra a un club de matemáticas en donde, a los catorce años, lo recomiendan para ingresar en una escuela para jóvenes talentos. En 1982 obtiene la medalla de oro en las olimpiadas de matemáticas al contestar correctamente 42 de los 42 problemas propuestos. En 1996 rechaza un premio de la Sociedad Matemática Europea, en 2006 la medalla Fields (considerada el Nobel de las Matemáticas) y en 2010 un premio de un millón de dólares que le conceden por haber resuelto un famoso problema (*conjetura de Poincaré*) hasta entonces sin respuesta. Este talento matemático, aficionado al ajedrez y a la ópera, en la actualidad vive en un sencillo departamento de San Petersburgo, retirado de las matemáticas.

Yákov Perelmán.

Otro matemático ruso famoso fue Yákov Perelmán, quien nació en 1884, en Bialystok y murió en Leningrado (ahora San Petersburgo) en 1942, divulgador de la ciencia. Entre sus obras más conocidas se destacan *Matemática recreativa*, *Álgebra recreativa*, *Física Recreativa* y *Astronomía Recreativa*, obras que en su tiempo fueron publicadas por la editorial Mir, pero en la actualidad sólo pueden ser consultadas en bibliotecas y en la internet. En el lado oscuro de la Luna se encuentra un cráter de 95 km de diámetro llamado "Perelmán", en honor de Yákov. Es importante destacar que no existe ningún grado de parentesco entre ambos científicos.

3. A Roberto le interesa que su hija Lucía consuma suficiente calcio, pues está en crecimiento. Roberto investigó que la dieta diaria debe incluir 900 mg de calcio. Un paquete del pan que le gusta a ella, anuncia en su empaque que cada pieza contiene el 16% del calcio recomendado en la dieta diaria; además, un vaso de leche contiene 286 mg.
   a) ¿Cuánto calcio contiene una pieza de pan? ______
   b) ¿Cuánto calcio hay en cinco piezas de pan? ______
   c) ¿Cuál es la expresión que nos dice cuánto calcio hay en $x$ piezas de pan?
   ______





   d) Expliquen si esa expresión es una función lineal o cuadrática. ______
   e) ¿Cuántas piezas de pan cubren la recomendación diaria de calcio? ______
   f) Si Roberto convence a Lucía de tomar un vaso de leche en el desayuno y otro en la cena, ¿cuántas piezas de pan debe comer para cubrir la recomendación diaria de calcio? ______

4. Juan tiene que pintar una barda de 24 m de largo. Él solo lo hace en seis horas, mientras que su amigo José lo hace en doce horas, pues tiene menos experiencia. Si trabajan juntos, ¿en cuánto tiempo terminarán el trabajo?
   a) Antes de contestar, primero completen la siguiente tabla indicando cuántos metros de barda puede pintar cada uno en el tiempo señalado.

| | Juan | José | ambos |
|---|---|---|---|
| 1 hora | | | |
| 2 horas | | | |
| 3 horas | | | |

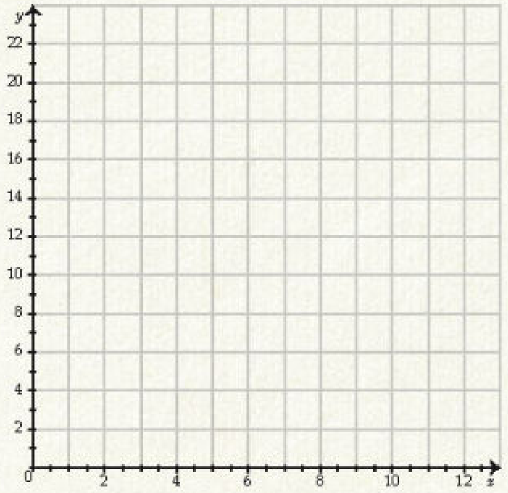
   b) Escriban una ecuación que exprese el trabajo que cada uno de los amigos puede desempeñar en $x$ horas.
   Juan ______
   José ______
   c) Ahora escriban una ecuación algebraica que exprese el trabajo combinado de los dos pintores, de modo que concluyan los 24 metros de barda. ______
   d) Resuelvan la ecuación encontrada en el inciso anterior e indiquen el valor de la variable contenida en ésta. ______
   e) Si Juan se cansa después de dos horas de haber comenzado y ya no continúa pintando, ¿en cuánto tiempo se concluirá el trabajo, si José sigue pintando el solo?
   ______
   f) ¿En cuánto tiempo pintarán juntos un muro de 48 metros? Justifiquen matemáticamente su respuesta. ______
   ______
   g) Planteen una ecuación que represente la situación del inciso anterior. ______
   h) ¿Cuál es el valor de la variable de la ecuación que acaban de plantear? ______
   i) Describan el método que siguieron para desarrollar las ecuaciones anteriores y cómo las resolvieron. ______
   ______
   ______

5. Tenemos ahora la ecuación $y = 3x + 2$.

a) Completen la tabla siguiente con los valores que obtengan para la variable $y$.

| $y = 3x + 2$ | |
|---|---|
| $x$ | $y$ |
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| 6 | |
| 7 | |
| 8 | |
| 9 | |
| 10 | |

b) Grafiquen en el siguiente plano los puntos de la tabla.



c) Analicen la manera en que la variable $y$ cambia conforme lo hace la variable $x$ y planteen un problema que exprese lo que sucede en la ecuación.

______________________________

______________________________

d) Planteen dos preguntas basadas en la ecuación y a continuación escriban sus respuestas.

¿______________________________?

Respuesta: ____________________

¿______________________________?

Respuesta: ____________________

e) Expongan al grupo el problema que plantearon, así como sus respuestas. Con la ayuda de su profesor comprueben si sus resultados son correctos.

**TIC**

Existen algunas habilidades necesarias para resolver problemas como los planteados en esta lección. Algunas de estas habilidades son:

- Observación
- Toma de decisiones
- Manejo de información en forma de gráficas, imágenes o tablas
- Discusión grupal y en equipos
- Comunicación de conclusiones

A continuación, te recomendamos dos páginas electrónicas en las que puedes desarrollar las habilidades mencionadas.

http://www.profesorenlinea.com.mx/matematica/Graficos.html

http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Interpretacion_expresiones_algebraicas_d3/vida.htm

(Consulta: 5 de diciembre de 2016.)





## Aplicando lo aprendido

Resuelvan, en equipos de tres o cuatro integrantes, los problemas siguientes.

1. Para un día de campo al que asistirán 32 personas, el organizador calcula dar de comer tres hot dogs y una ensalada de betabel a cada asistente.

   El paquete de medio kilo de salchichas contiene ocho piezas y calcula que un kilo de betabel rinde para cuatro raciones de ensalada.

   a) ¿Cuántas salchichas se necesitan para dar de comer a todos los asistentes? ________

   b) ¿Qué cantidad de paquetes de salchicha se necesitan? ________

   c) ¿Cuántos kilogramos de betabel se necesitan para cubrir todas las raciones planeadas? ________

   d) Si confirman su asistencia ocho personas más, ¿qué cantidad se requiere en total para atender bien a todos los asistentes?

   Cantidad de salchichas: ________

   Paquetes de salchichas: ________

   Kilogramos de betabel: ________

2. Para asistir a un baile escolar de recaudación de fondos, los boletos en preventa cuestan \$50 y el día del evento costarán \$60. Hasta el cierre de la preventa se han recaudado \$2 700.

   a) ¿Cuántos boletos deben venderse el día del evento para juntar los \$6 000 necesarios? ________

   b) ¿Cuántos asistentes se esperan en total si se consiguen los fondos necesarios? ________

   c) ¿Cuál es la expresión que representa lo recaudado en la preventa? ________

   d) Escriban una ecuación que exprese lo que espera recaudarse el día del evento: ________

   e) Ahora tomen las dos ecuaciones anteriores y escriban una nueva que las combine: ________

3. Para el evento mencionado en el inciso anterior, el señor López ofreció donar las bebidas y calcula que se necesitará un garrafón con 20 litros de agua por cada once personas.

   a) ¿Qué cantidad de garrafones deberá llevar? ________

   b) ¿Cuántos litros de agua deben preparar para cubrir lo planeado? ________

4. Para un fabricante, el costo por elaborar $x$ cantidad de tubos de plástico es seis veces el mismo número.

   a) Escriban la expresión que represente la cantidad de dinero que necesita invertir el fabricante para cubrir un pedido de 300 tubos. ________

b) ¿Cuántos tubos pueden elaborarse con un capital de $735 000? ______

5. El camino que recorre Pedro entre su casa y la escuela mide 2 km. De ida a la escuela tarda diez minutos menos que de regreso a casa, y el tiempo promedio de los dos trayectos es de 15 minutos.

a) Escriban cuántos minutos tarda en ir a la escuela. ______

b) ¿Cuánto tiempo tarda en regresar a su casa? ______

c) Ahora escriban la velocidad que alcanza al dirigirse a la escuela. ______

d) ¿Cuál es la velocidad a la que camina de regreso a su casa? ______

e) ¿A qué velocidad promedio camina Pedro? ______

f) Considerando el promedio de velocidad, ¿cuánto tiempo tardará en llegar a casa de su amiga Rebeca si su casa se encuentra a 40 km de la casa de Pedro? ______

6. La pizzería cercana a la escuela de Hugo tiene la siguiente tabla de precios colgada en la puerta.

| Tamaño | Diámetro | Precio |
|---|---|---|
| Pequeña | 30 cm | $ 160 |
| Mediana | 36 cm | $ 200 |
| Grande | 42 cm | $ 250 |
| Gigante | 48 cm | $ 300 |

a) ¿Cuál es el área de cada una de las pizzas? Contesten en la tabla.

| Tamaño | Área |
|---|---|
| Pequeña | |
| Mediana | |
| Grande | |
| Gigante | |

**Saber más...**

La educación vial es el conjunto de conocimientos y normas de conducta para utilizar correctamente las vías públicas y los medios de transporte. Al seguir estas reglas podemos utilizar las vías públicas sin provocar conflictos o accidentes con los demás peatones o automovilistas. Si quieres acercarte más a estas normas, visita la página disponible en: http://www.centesac.org.mx/manuales/modulo2.pdf (Consulta: 5 de diciembre de 2016.)

b) ¿Cuál es el precio por centímetro cuadrado de pizza? ______

c) ¿Cuál tamaño de pizza conviene más? ______

d) ¿Qué precio debe tener la pizza chica para ser la que más convenga? ______

Comparen sus respuestas con las de otros compañeros, reflexionen sobre las diferencias encontradas y, con la ayuda de su profesor, comprueben que sus respuestas son correctas.





**Eje: Forma, espacio y medida**

**Tema: Medida**

## Contenido 29

Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto.

### Lo que sé

Resuelve los problemas de esta sección de manera individual.

1. Se tiene un silo cónico y deseamos saber su altura. La persona encargada de hacerlo encuentra que el diámetro de la base mide 10 metros, mientras que el ángulo formado con el piso es de 59° 30'.

a) En el siguiente recuadro traza un esquema del cono y haz los cálculos necesarios para calcular su altura.

b) ¿Cuál es la altura del cono? ______

c) Explica paso a paso el procedimiento que seguiste para calcular la altura del cono.

______

2. Una persona que tiene un **cono de visión** de 56°, mira hacia un paisaje situado a 37 metros de distancia.

   a) ¿Cuál es el área del paisaje que puede ver con nitidez? ______

   b) Explica detalladamente el procedimiento que seguiste. ______

**Glosario**

**Cono de visión.** Es el campo visual que tiene una persona para percibir las imágenes; su magnitud se mide por la amplitud del ángulo que le permite al ojo capturar los objetos.

**Cono truncado.** Cono al que le hace falta la parte superior que contiene el vértice.

3. La figura que se forma con un círculo y una de sus imágenes homotéticas con respecto al centro es un **cono truncado**.

   a) Dibuja en el siguiente espacio un esquema de la figura mencionada.

**Libroteca**

Recomendamos que leas el siguiente libro, que puedes encontrar en los Libros del Rincón:

De la Peña, Juan Antonio, *Geometría y el mundo*, México, Santillana, 2002.

   b) Encuentra el área de las bases y la altura del cono truncado que se forma con un círculo de 2.5 cm de radio y su imagen homotética $P(1/4)$.

   - Área de la base inferior. ______
   - ¿Cuál es el área de la base superior? ______
   - Altura. ______

   c) Explica paso a paso cómo obtuviste el resultado. ______

4. Se quiere construir una estructura cónica de 7 metros de altura y 3.5 metros de radio.

   a) ¿Cuál es el ángulo que forma la cara lateral del cono con la horizontal? ______

   - Explica tu respuesta. ______

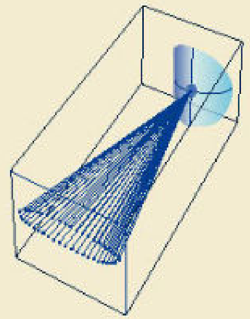
   b) ¿Cuál es el área de la base de la estructura? ______





**Saber más...**

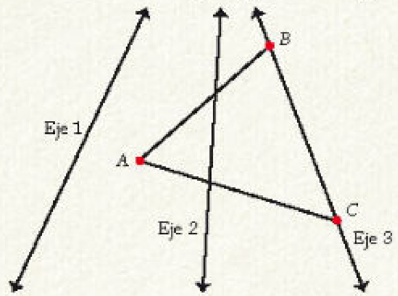
El *campo visual* o *cono de visión* se define como el área que puede percibir el ojo humano cuando se enfoca la mirada al frente. El campo visual es de unos 160° con respecto a la horizontal y de unos 130° con respecto a la vertical. La vista es más nítida en el centro de visión y va perdiendo nitidez conforme se aleja hacia la periferia. El cono de visión, o visual, es un cono cuyo vértice está en el centro de los dos ojos (punto binocular) y se abre en un ángulo no mayor a 60°. Más allá de ese ángulo las cosas se ven borrosas.



## Practicando lo aprendido

Trabajando en parejas, resuelvan los problemas que se presentan a continuación.

1. En la figura siguiente se tiene un triángulo y varios ejes de rotación.




   a) En su cuaderno hagan un esbozo del cuerpo que se obtiene al rotar el triángulo con respecto a cada uno de los ejes.

   b) Expliquen qué método siguieron y cuál fue el cuerpo que obtuvieron con la rotación. ______

   c) ¿Es posible obtener un cilindro rotando el triángulo? ______

   - ¿Por qué? ______

**TIC**

Para enriquecer el tema del volumen de los cilindros, te recomendamos visitar la página disponible en: http://www.profesorenlinea.cl/geometria/VolumenCilindro.htm (Consulta: 5 de diciembre de 2016), posteriormente, en equipo, propongan actividades similares a las que vieron en la página.

2. ¿Con qué polígonos se puede formar un cono? ______

   a) ¿Dónde colocarían el eje de rotación?

   b) ¿Este eje es único o hay otros con los que también se puede obtener un cono?

   - Justifiquen su respuesta. ______

## EL RINCÓN MATEMÁTICO

Si rotas un segmento de recta con respecto a un eje, el segmento forma una superficie. A este eje se le llama *generatriz*, porque como su nombre lo indica, genera una superficie. Si a la *generatriz* le agregamos los segmentos perpendiculares que unen al eje con sus extremos, entonces generamos un sólido. Dependiendo de la posición de la *generatriz* con respecto al eje, se obtienen conos, cilindros o conos truncados.

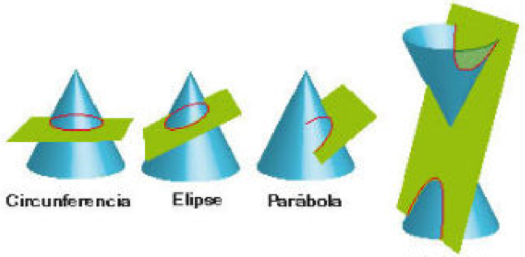
3. ¿Qué posición debe tener la generatriz con respecto al eje de rotación para obtener alguno de los siguientes cuerpos?
   a) Un cono truncado ______
   b) Un cono ______
   c) Un cilindro ______
   d) En su cuaderno hagan un dibujo de la generatriz, los segmentos perpendiculares al eje de rotación y el sólido que se genera.
4. Si generamos un cono o un cilindro a partir de su generatriz, ¿serán siempre rectos? Justifiquen su respuesta. ______
   a) ¿Qué cuerpo se forma cuando el eje de rotación cruza la generatriz? ______
   b) Expliquen su respuesta. ______
   c) Hagan un dibujo en su cuaderno del sólido obtenido.
   d) Expliquen de qué manera debe colocarse la generatriz y el eje de rotación para obtener dos conos idénticos unidos por el vértice. ______

## EL RINCÓN MATEMÁTICO

Si tenemos dos conos rectos unidos por el vértice (conocidos como *cono doble*), como se muestra en la ilustración, y los cortamos por un plano, obtenemos varias curvas conocidas como *cónicas*.

Si el plano es perpendicular al eje de rotación, se obtiene una *circunferencia*.

Si el plano no es perpendicular al eje ni paralelo a la generatriz, entonces la curva que se forma es una *elipse*.




Si el plano es paralelo a la generatriz, entonces se forma una *parábola*.

Si el plano es paralelo al eje de rotación, entonces se forma una *hipérbola*.





6. Hagan un análisis parecido al que se hizo en la sección "Rincón matemático" con respecto a un cilindro recto cortado por un plano.
   a) ¿Qué tipo de curvas se forman? ______
   Expliquen su respuesta. ______
7. Expliquen qué figura se obtiene al cortar un cono doble con un plano perpendicular al eje de rotación que pase por el vértice. ______
   a) En el siguiente espacio hagan un esquema en el que se muestre el cono doble y el corte que se menciona.
8. ¿Qué figura se obtiene al cortar un cono doble con un plano que contenga la generatriz? Justifiquen su respuesta. ______
9. ¿Podemos decir que una recta es una cónica? Expliquen su respuesta. ______

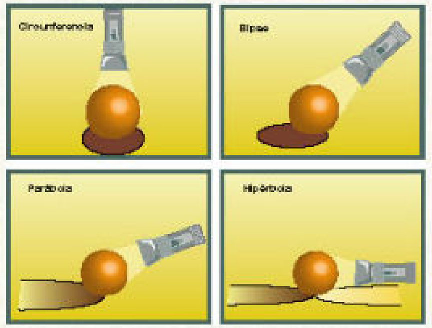
### Saber más...

Menecmo o Menaechmus fue un matemático griego que vivió entre 375 y 325 a.n.e., amigo de Platón y maestro de Aristóteles, se le acredita el descubrimiento de las secciones o curvas cónicas. Habla de ellas como las secciones de un cono circular recto hechas por un plano. Más tarde, Apolonio de Perga (o Pérgamo, una antigua ciudad del Asia Menor) que vivió entre 262 y 190 a.n.e., hizo un estudio más completo de estas curvas, en su tratado *Las cónicas*, que constaba de ocho libros y de los cuales sólo sobreviven en la actualidad los siete primeros. Apolonio sólo consideró un cono (no el cono doble que consideramos en la actualidad), por lo que sólo se consideraba una rama de la hipérbola, y no las dos que realmente tiene.

## APLICANDO LO APRENDIDO

Resuelvan los problemas y realicen las actividades siguientes trabajando en equipo.

1. En la fotografía presentamos una pelota iluminada por un foco desde distintos ángulos. Observen las figuras que se forman en las respectivas sombras.




   a) Expliquen por qué creen que se forman las secciones cónicas de esta manera. ______

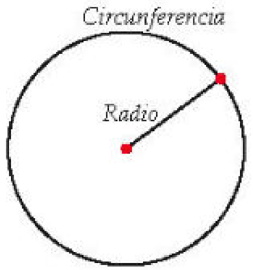
## EL RINCÓN MATEMÁTICO

**Glosario**

**Lugar geométrico.** Es el conjunto de puntos que cumplen con una cierta propiedad. Los lugares geométricos constan de un número infinito de puntos.

**Equidistantes.** Puntos que se encuentran a la misma distancia de otro u otros.

Una circunferencia se puede definir como el **lugar geométrico** de los puntos que **equidistan** de un mismo punto llamado centro. El segmento de recta que se forma con el centro y uno de los puntos equidistantes se llama "radio".




2. En el siguiente espacio grafiquen un plano cartesiano, localicen las siguientes coordenadas y tracen las circunferencias señaladas.
   a) Centro en el punto (2, 2) y radio 5
   b) Centro en el punto (–3, 1) y radio 3
   c) Centro en el punto (5, -3) y radio 2





   d) Para cada caso, escriban tres puntos que formen parte de la circunferencia.
   ______, ______, ______.

3. Expliquen cómo es posible encontrar el centro de una circunferencia si se conocen tres de sus puntos. ______

4. Se tiene un silo cónico recto de 13 m de altura y 3.5 m de radio y se llena de trigo hasta una altura de siete metros.
   a) ¿Cuál es el diámetro de la superficie hasta donde llega el trigo? ______
   b) Expliquen, paso por paso, el procedimiento que siguieron para encontrar la respuesta. ______

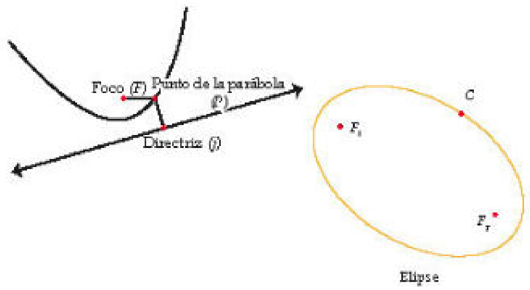
5. Tomen un trozo de papel que tenga una forma rectangular. Cerca del borde inferior, y más o menos en el centro de la hoja, tracen un punto. Hagan un doblez al papel de modo que el borde inferior quede sobre el punto, desdoblen el papel y hagan otro doblez de modo que la marca del doblado sea diferente a la primera. Así, marquen tantos dobleces como puedan doblando y desdoblando el papel (recuerden siempre que el borde inferior debe quedar sobre el punto).
   a) ¿Qué cónica forman todos los dobleces de la hoja? ______
   b) Pidan a su profesor que les explique por qué se formó esa curva y escriban a continuación lo que entendieron de su explicación. ______

6. Corten una hoja de papel en forma de círculo y coloquen un punto cerca del borde de la misma. Al igual que en la actividad anterior, hagan dobleces de modo que el borde quede sobre el punto.
   a) Si los dobleces abarcan toda la circunferencia, ¿qué tipo de curva se forma? ______
   b) Pidan a su profesor que les explique por qué se formó esa curva y escriban lo que entendieron de su explicación. ______

## EL RINCÓN MATEMÁTICO

La *parábola* y la *elipse* también se pueden definir como lugares geométricos. La *parábola* es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto (llamado foco) y de una recta (llamada directriz); mientras que la *elipse* es el lugar geométrico de los puntos cuya suma a dos puntos fijos (llamados focos) es una constante.

En las ilustraciones te mostramos una parábola y una elipse como lugares geométricos.



En el caso de la parábola, la distancia que hay del punto *F* (foco) al punto *P*, es la misma que la distancia que existe del punto *P* a la recta *j*.

Para el caso de la elipse, tenemos lo siguiente:

$$F_1C + CF_2 = k \text{ (donde } k \text{ es una constante)}$$

7. Tomen un trozo de cuerda que mida 10 cm de longitud y fíjenlo con alfileres o tachuelas por sus extremos a una cartulina, cuidando que la cuerda no quede tensa. Esto hace que tal vez no se forme la elipse. Con un lápiz bien afilado, estiren la cuerda manteniéndola tensa; muevan el lápiz sin despegar la punta de la cartulina. Dirijan el movimiento del lápiz hacia ambos lados de los extremos de la cuerda.
   a) ¿Qué figura se formó en la cartulina? ______
   b) Revisen la sección "Rincón matemático" y expliquen por qué se formó esa figura.
   ______

8. Repitan el ejercicio anterior varias veces, pero disminuyendo cada vez más la distancia entre los extremos fijos para que puedan contestar las siguientes preguntas.
   a) ¿Cómo va cambiando la curva? ______
   b) ¿Qué tipo de curva se obtiene cuando los dos extremos de la cuerda coinciden?
   ______
   - ¿Por qué? ______
   c) ¿Se puede decir que la circunferencia es un caso particular de la elipse? ______
   - Expliquen su respuesta. ______

9. Si la circunferencia, la parábola y la elipse se definen como lugares geométricos, la hipérbola no debería ser la excepción. Hagan una investigación, consultando al menos tres libros de la biblioteca, sobre la hipérbola como lugar geométrico.
   a) Expliquen en los siguientes renglones cómo se define una hipérbola como lugar geométrico. ______

**TIC**

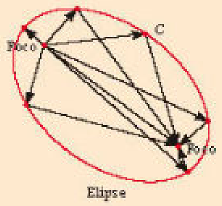
Para complementar lo estudiado en esta lección respecto a las secciones cónicas, te recomendamos visitar la dirección electrónica disponible en: http://docente.ucol.mx/rcebrera/swish/index.htm
(Consulta: 5 de diciembre de 2016.)





## Matemáticas con otras ciencias

Las *secciones cónicas* tienen una propiedad óptica interesante: todo rayo (o semirrecta) que sale de un foco hacia la curva, se proyecta en la dirección del otro foco.




Por ejemplo, si tenemos un espejo con forma de elipsoide y ponemos una fuente de luz en uno de los focos, toda la luz se reflejará en la dirección del otro foco, como se ilustra en la figura.

En el caso de la parábola podemos considerar que el otro foco está a una distancia infinitamente grande, por lo tanto, todo rayo de luz que se refleje en un espejo parabólico se dirigirá hacia el infinito, formando un haz de luz paralelo.

En el caso de la hipérbola, los rayos de luz que salen de un foco se reflejarán siguiendo la semirrecta que parte del otro foco y pasa por el punto de reflexión.

Y en el caso de un espejo circular, la luz que sale del foco regresa al foco (pues ambos focos coinciden en el centro).

Este comportamiento de los rayos de luz se debe a su carácter de onda electromagnética. En el bloque 4 de tu curso de Ciencias de segundo año, se estudió la naturaleza dual de la luz, como onda y como partícula; así que tenemos un complemento a lo estudiado en ese curso.

10. En la página web que recomendamos en la sección respectiva, se cuenta que Arquímedes logró incendiar las naves que acosaban a la ciudad de Siracusa usando espejos parabólicos. Expliquen cómo pudo lograrlo. ______

11. Un reloj solar consiste en una vara o vástago (conocida como *gnomon*) cuya sombra indica la hora. Se dice que la sombra del gnomon sigue una trayectoria cónica y que dependiendo de la época del año y de la posición del plano del reloj, la cónica puede ser una parábola, una elipse o una hipérbola.
   a) Con la ayuda de su profesor, reflexionen sobre cómo sucede ese cambio en la forma de la sombra del reloj solar y escriban sus conclusiones. ______

12. Expliquen por qué un haz de luz que sale del foco de un espejo parabólico se refleja como un haz de rayos paralelos. ______

13. Las *cámaras de los suspiros* o de los susurros son recintos en los que si una persona se para en un cierto punto, puede escuchar con nitidez lo que se dice en otro punto del cuarto. Es posible, incluso que haya una pared entre las dos personas. Si la persona se aleja de este punto ya no puede escuchar lo que dice la otra. Expliquen cómo es posible lograr este efecto en ese tipo de cámaras. ______

**EJE: FORMA, ESPACIO Y MEDIDA**
**TEMA: MEDIDA**

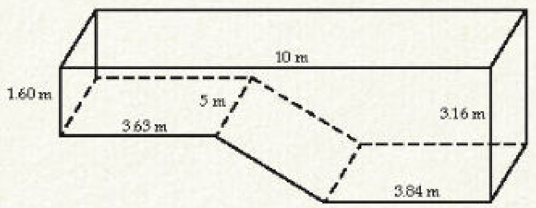
## Contenido 30

Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides.

### LO QUE SÉ

Resuelve los problemas de esta sección de manera individual.

1. En la figura tenemos una alberca vacía. Queremos llenarla de modo que el agua llegue a 10 cm antes de desbordarse.



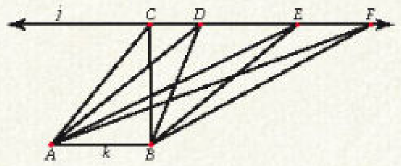

   a) ¿Cuántos litros de agua se necesitan para llenarla hasta el nivel indicado? ________

   b) Explica cómo obtuviste el resultado. ________

2. ¿Es posible obtener un círculo si trazamos polígonos regulares con un número cada vez mayor de lados? ________

   a) Explica cuál sería el límite de polígonos para construir el círculo mencionado.

3. En la figura siguiente, la recta $j$ es paralela al segmento $k$.




   a) ¿Qué tienen en común los triángulos $ABC$, $ABD$, $ABE$ y $ABF$? ________

   b) Explica tu respuesta. ________

4. Calcula el volumen y el área de un prisma octagonal recto de 3 cm de lado en la base y una altura de 7 cm. Explica el procedimiento que seguiste para hallar la respuesta. ________

5. La pirámide de Cholula, también conocida como pirámide de Tlachihualtépetl (que significa "cerro hecho a mano"), tiene una base cuadrada y su volumen se estima en unos 4 500 000 m³.

   a) Calcula su altura y describe paso a paso el procedimiento que seguiste. ________

6. Si tienes una pirámide pentagonal, una octagonal y una cuadrada, todas rectas con la misma altura y con la misma área en la base, ¿cómo son sus volúmenes? Explica tu respuesta. ________





7. Explica las diferencias que existen entre prismas, pirámides y poliedros. ________

Compara tus respuestas con las de otros compañeros y reflexionen sobre las diferencias que encuentren.

### EL RINCÓN MATEMÁTICO

Recordemos que la fórmula para calcular el volumen de un prisma regular es:

$V = A \times h$, donde $A$ es el área de la base y $h$ es la altura;

y la fórmula para calcular el volumen de una pirámide es la siguiente:

$V = \frac{A \times h}{3}$, donde $A$ es el área de la base y $h$ es la altura de la pirámide.

### Saber más...

¿Sabías que la pirámide de Cholula es una pirámide escalonada, por lo que no es muy exacto calcular su altura como si fuera el sólido que en geometría conocemos como pirámide? Visita la siguiente dirección electrónica, en la que encontrarás más información respecto a esta pirámide y la zona arqueológica de Cholula. Disponible en:
http://www.inah.gob.mx/index.php?option=com_content&view=article&id=5568
(Consulta: 5 de diciembre de 2016.)

### TIC

Si te interesa ampliar tu conocimiento sobre los prismas y sus propiedades, visita la página que se encuentra disponible en:
http://www.ceibal.edu.uy/UserFiles/P0001/ODEA/ORIGINAL/110908_prismas.elp/index.html. Si tienes oportunidad de visitarla, contesta, ¿qué diferencia hay entre aristas y lados?
(Consulta: 5 de diciembre de 2016.)

### PRACTICANDO LO APRENDIDO

Resuelvan los problemas de esta sección trabajando en equipo.

1. ¿Es posible considerar un cilindro como un prisma cuya base es circular? ________
   a) ¿Por qué? ________
2. El volumen de un prisma se calcula multiplicando el área de la base por su altura, ¿podemos calcular el volumen de un cilindro de la misma manera? ________
   a) ¿Por qué? ________
3. Hay un cilindro cuyo radio de la base mide 4.7 cm y tiene una altura de 11.4 cm.
   a) ¿Cuánto mide su volumen y cuánto su área lateral? ________

## EL RINCÓN MATEMÁTICO

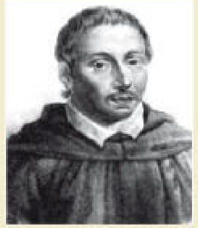
El *principio de Cavalieri* dice que si se tienen dos sólidos de la misma altura que al ser cortados por un mismo plano paralelo a la base (o de una de sus caras), muestran secciones transversales de la misma área, entonces los dos sólidos tienen el mismo volumen.

En la foto, según el principio de Cavalieri, el volumen que ocupan las pilas de monedas es el mismo.

4. Encuentren el volumen de un cilindro recto que tiene la misma altura y la misma área de la base que un prisma pentagonal recto de 5 cm de lado en la base y 11 cm de altura. ______

### Saber más...

Bonaventura Cavallieri fue un jesuita y matemático italiano nacido en 1598 en la ciudad de Milán. En 1635 desarrolló su *teoría de los indivisibles* que permite calcular el área y el volumen de algunas figuras geométricas. Esta teoría de los indivisibles, junto con algunos aportes de Arquímedes y Kepler forman los antecedentes de la rama de la matemática conocida como *cálculo*.



5. ¿Se puede decir que un cono es una pirámide con base circular?
______
a) ¿Por qué? ______

6. El Popocatépetl es el segundo volcán más alto de México y se cataloga como un *volcán cónico*. Su altura se calcula en 5 452 metros con el ángulo medido en la fotografía.


a) Calculen el diámetro del volcán.
______
b) ¿Cuál es el volumen del volcán? ______
c) Expliquen con detalle los pasos que siguieron para hacer el cálculo. ______
______
______



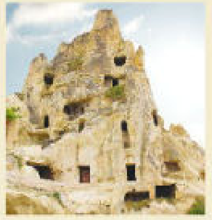


7. ¿Qué volumen de agua le cabe a un cucurucho de papel que tiene un diámetro de 8 cm y una altura de 7 cm? ______

8. Se tiene un cono recto 4.2 cm radio y 12 cm de longitud en su generatriz. ¿Cuál es su volumen? ______

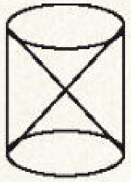
### Saber más...

Capadocia es una región situada en Turquía al este de la península de Anatolia. La región cercana a la ciudad de Goreme tiene unas formaciones rocosas en forma de cono que alguna vez funcionaron como viviendas, como se muestra en la fotografía.



## APLICANDO LO APRENDIDO

Realicen las siguientes actividades en parejas.



1. El cilindro de la figura tiene excavados dos conos idénticos cuya altura es la mitad de la altura del cilindro. Si el cilindro tiene 6 cm de diámetro y 7 de altura, encuentren el volumen del cuerpo que queda cuando se extraen los dos conos. ______
2. El cráter cónico de un volcán tiene una circunferencia de 5 027 metros en su parte superior, la pendiente de su ladera forma un ángulo de 53° con respecto al plano horizontal. Sobre la ladera, a una distancia de 63.4 m más abajo, se encuentra la lava.
   a) Calculen el área de la superficie en la que se encuentra la lava. ______
   b) ¿Cuál es el volumen de lava que se necesita para cubrir hasta la parte superior del cráter? ______
3. El volcán Fujiyama, ubicado en Japón, tiene una altura que se estima en 3 776 metros y una base de 50 km de diámetro, aproximadamente. Calculen su volumen. ______

### Saber más...

La vulcanología es la rama de la geofísica que se encarga de estudiar los volcanes y todos los fenómenos relacionados con ellos: producción de lava, humo, ceniza, factores de riesgo para poblaciones, movimientos de tierra como producto de la actividad volcánica, incluso la producción de tsunamis. Debido a que un vulcanólogo debe trabajar en los lugares donde hay volcanes activos, a menudo esta profesión es emocionante. Te recomendamos visitar la página del departamento de vulcanología del Instituto de Geofísica de la UNAM para que te des una mejor idea de lo que hace un vulcanólogo, se encuentra disponible en: http://vulcanologia.geofisica.unam.mx/spanish/objetivos.html
(Consulta: 5 de diciembre de 2016.)

4. Se tiene un tinaco cilíndrico completamente vacío de 2 metros de radio y 6 metros de altura, empieza a llenarse con agua a razón de 3 litros por segundo. Sabemos que un litro de agua ocupa aproximadamente 1 000 $cm^3$.
   a) ¿Cuántos litros se necesitan para que se llene el tinaco? ____________
   b) ¿En cuánto tiempo se llenará? ____________
   c) ¿Cuántos cm por minuto sube el nivel del agua? ____________
5. En la foto tenemos un filtro de agua hecho de piedra volcánica. Tiene 40 cm de altura, 30 cm de diámetro exterior y un grosor de 5 cm.

   a) Si el interior es completamente cónico, calculen el volumen de agua que le cabe. ____________
   b) Si filtra su volumen completo en 6 horas, ¿cuántos litros por hora se filtran? ____________
6. Para construir una obra subterránea, se hizo un túnel de 40 m de diámetro que tiene una longitud de 1.6 km. ¿Cuál es el volumen de tierra que se sacó para excavarlo? ____________
7. Un fabricante de embudos tiene un pedido de 10 000 piezas. Las especificaciones del cliente solicitan que el volumen de los embudos sea de un litro y que tengan un diámetro de 14 cm.
   a) ¿Qué profundidad deben tener los embudos para cumplir con las especificaciones del cliente? ____________
   b) Escriban dos ejemplos de las medidas que podrían tener los embudos si la única condición fuera que tuvieran un litro de volumen.
8. El faro de Cordouan, mencionado en la sección "Saber más", tiene una altura de 63 metros y una base de 40 metros de diámetro.
   a) ¿Estos datos son suficientes para hallar su volumen? Justifiquen su respuesta.
   b) ¿Cuál es el volumen del faro? ____________

Comparen sus respuestas con las de otros compañeros, reflexionen sobre las diferencias que encuentren y con la ayuda de su profesor comprueben que sus resultados sean correctos.

**TIC**

Si te interesa saber más sobre los faros, te recomendamos visitar la siguiente página: http://www.nationalgeographic.com.es/viajes/grandes-reportajes/los-doce-faros-mas-bellos-del-mundo-2_8917 Comenta con tus compañeros la forma que tienen la mayoría de los faros mencionados en esa página, así como sus principales características.
(Consulta: 5 de diciembre de 2016.)





**EJE: FORMA, ESPACIO Y MEDIDA**

**TEMA: MEDIDA**

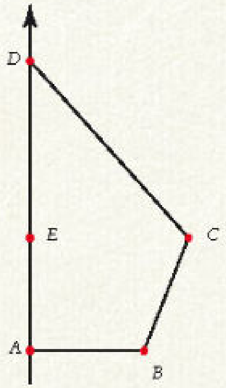
## Contenido 31

Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas.

### LO QUE SÉ

Resuelve los problemas de esta sección de manera individual.

1. ¿Cuál es el volumen de un cono recto de 5 cm de radio en la base y 12 cm de altura?
2. Encuentra las dimensiones de un tetraedro cuyo volumen sea igual al del cono del ejercicio anterior. ____________
   a) ¿Cuál de los dos cuerpos puede funcionar mejor como envase para un líquido?
   - ¿Por qué? ____________
3. Tenemos un recipiente lleno de agua que tiene forma de cono, su radio mide 20 cm y su altura es de 45 cm. Si el agua se vacía en un recipiente con forma de cilindro recto de 15 cm de radio y 40 cm de altura, ¿se derramará el agua? ____________
   a) Si la respuesta es positiva, ¿qué volumen de agua se derrama? ____________
   b) Si la respuesta es negativa, ¿hasta qué altura sube el líquido? ____________
   c) Describe detalladamente el procedimiento que seguiste para responder los incisos anteriores. ____________
4. En la figura, tenemos que $AB$ es paralela a $CE$, si $AB = 2.54$ cm, $BC = 2.65$ cm, $CE = 3.46$ cm y $CD = 5.14$ cm, calcula el volumen del cuerpo que se genera al rotar la figura sobre el eje de rotación.




V = ____________

5. Un vaso con forma de cilindro recto tiene un radio de 5 cm y una altura de 12 cm. Calcula el volumen de agua que le cabe. ______

6. En una oficina cuentan con un despachador de agua con capacidad de 20 litros y los conos de papel de que disponen para servir el líquido miden 8 cm de diámetro y 9 cm de altura.

   a) ¿Cuál es el volumen de cada cono? ______

   b) ¿Cuántos conos pueden llenarse con la capacidad que tiene el despachador? ______

Compara tus resultados con los de otros compañeros y con la ayuda del profesor comprueben que sus respuestas son correctas.

### Glosario

**Ergonómico.** Se refiere a la ergonomía que es el estudio del diseño de equipo o de herramientas de modo que se adapten a las condiciones personales de quien las usa.

### Saber más...

El diseño de empaques y envases requiere de conocimiento matemático y creatividad. Esta actividad forma parte de una rama del conocimiento que se conoce como diseño industrial. El diseñador industrial se encarga de proyectar los productos de la industria de modo que sean seguros, **ergonómicos**, sustentables, amables con el ambiente y estéticos. Si te interesa saber más sobre las actividades que desempeñan estos profesionales, te recomendamos que investigues más al respecto en la página oficial de la universidad en la que te gustaría estudiar.

### TIC

Recomendamos que visites la siguiente página electrónica, en la que encontrarás diversos ejemplos y problemas sobre cuerpos cónicos y cilíndricos:
http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/EDAD_2eso_volumen_cuerpos_geometricos/2esoquincena10.pdf
(Consulta: 5 de diciembre de 2016.)

## Practicando lo aprendido

Resuelvan los ejercicios de esta sección en equipos de tres o cuatro integrantes.

1. En una procesadora de yogur se requiere diseñar envases cilíndricos con una capacidad de 300 ml y una altura de 6 cm. ¿Qué radio deben tener los envases? ______

2. Si en la misma procesadora se necesitan envases de 300 ml, pero de 3 cm de radio, ¿qué altura deben tener? ______

3. Se tiene una pirámide recta cuadrada de 4 cm de lado y 7 cm de altura.

a) Calculen el volumen de la pirámide. ______

b) Dibujen en su cuaderno un esquema en el que inscriban un círculo a la base de esta pirámide y expliquen aquí el procedimiento que siguieron. ______





c) Encuentren el volumen del cono que se forma con el círculo de la base y el vértice de la pirámide. ______

d) Dibujen en su cuaderno los dos cuerpos.

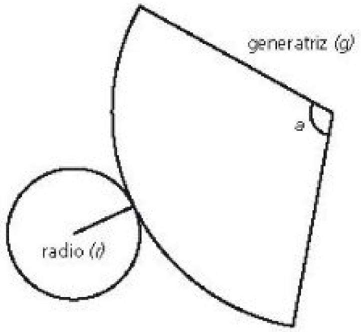
e) Escriban la razón del volumen de la pirámide con respecto al volumen del cono. ______

## El rincón matemático

En la figura tenemos el desarrollo plano de un cono recto.

La cara lateral del cono es un sector de circunferencia cuyo radio es la generatriz $g$, y la longitud de su arco es la longitud de la circunferencia de la base, $2pr$.

El ángulo $a$ de la sección de circunferencia se calcula usando una *regla de tres*: si la longitud de la circunferencia del círculo, de radio $g$, corresponde a 360°, ¿a cuántos grados corresponderá la longitud de la circunferencia de la base?




## Practicando lo aprendido

1. Tomando como base el desarrollo plano del cono de la sección "Rincón matemático", construyan con cartulina tres conos de diferentes dimensiones e igual volumen, la única condición es que su volumen tenga 113 cm³. En el siguiente recuadro hagan los cálculos necesarios para hallar los tres volúmenes.

| Cono 1 | Cono 2 | Cono 3 |
|---|---|---|
| | | |

2. Se tiene un tubo de cobre de tres metros de largo y un diámetro interior de 5 cm. Escriban a continuación cuál es el volumen que ocupa el tubo. ____________

3. Calculen el volumen en litros de agua que puede contener el tubo mencionado en el ejercicio anterior. ____________

4. El dueño de una fuente de sodas quiere mandar hacer vasos para servir sus licuados. Un diseñador le recomienda dos tipos de vasos, uno cilíndrico con 7.5 cm de diámetro y 15 cm de altura y otro cónico con 6.5 cm de diámetro y 19 cm de altura.
   a) ¿Cuál de los dos vasos tendrá el mayor volumen? ____________
   b) Tomen en cuenta la respuesta del inciso anterior y encuentren las medidas para diseñar otro vaso que tenga el mismo volumen. ____________

5. Tenemos un recipiente cilíndrico con una altura de 9 cm y 12 cm de diámetro en su interior. Dentro de él hay una pila de 36 discos compactos, cada uno tiene 12 cm de diámetro y 1 mm de espesor.
   a) Calculen el volumen que ocupa un disco. ____________
   b) ¿Cuál es el volumen que ocupa la pila de 36 discos? ____________
   c) Si el vástago donde se insertan los discos tiene una altura de 8 cm, indiquen cuántos discos más caben sobre el vástago. ____________
   d) Calculen el volumen que falta por llenar para ocupar todo el vástago. ____________
   e) Si el vástago queda completamente ocupado por discos, ¿cuál es el volumen del recipiente que queda vacío?
   f) ¿Cuál es el volumen real de un disco, si el radio del orificio donde entra el vástago mide 0.6 cm? ____________

Comparen sus resultados con los de otros compañeros y reflexionen respecto a las diferencias que encuentren. Con la ayuda de su profesor comprueben que sus respuestas son correctas.

**Saber más...**

En la naturaleza existen muchos fenómenos que se pueden modelar con una forma cilíndrica o cónica.

Es el caso del meteoro conocido como *tornado*, que es una columna de viento y polvo en forma de embudo o cono, que gira a gran velocidad. Su extremo inferior toca la superficie de la tierra y su extremo superior llega hasta una nube verticalmente muy grande. A continuación presentamos la foto de un tornado. ¿Sí notas su forma cónica? ¿Podremos calcular su volumen con las fórmulas que hemos estudiado en esta lección?





## Aplicando lo aprendido

Resuelvan en pareja los ejercicios que se presentan a continuación.

1. La pantalla de una lámpara de mesa en forma de cono truncado tiene una circunferencia mayor de 31.3 cm de diámetro, la circunferencia menor mide 18 cm y la distancia entre éstas es de 14.5 cm.
   a) Calculen la altura que tendría si tuviera una forma completamente cónica. ____________
   b) ¿Qué volumen ocuparía con las medidas encontradas en el inciso a? ____________
   c) ¿Qué volumen ocupa con la forma de cono truncado? ____________
   d) ¿Cuál es la diferencia numérica entre el volumen de los incisos b y c? ____________

2. En su cuaderno tracen el desarrollo plano de un cilindro recto que tenga un volumen de 269.39 $cm^3$ y una base de 3.5 cm de radio. Expliquen aquí el procedimiento que siguieron. ____________

3. ¿Qué dimensiones tiene un cilindro cuyo volumen es de 500 $cm^3$? Expliquen su respuesta. ____________
   a) Comparen su resultado con el de otros equipos o parejas y expliquen a continuación qué diferencias hubieron y por qué consideran que existieron. ____________

4. Tenemos un tanque de gas estacionario formado por un cilindro y dos semiesferas colocadas en sus extremos. Si el radio del tanque es de 20 cm y se especifica que tiene una capacidad de 120 litros, encuentren la longitud total del tanque. ____________

5. ¿Qué volumen ocupa un barquillo para helados cuya altura es de 12.5 cm y tiene un diámetro de 8 cm? ____________

6. Se quiere excavar un túnel de 800 metros de largo para que una carretera pase a través de una montaña. Su sección transversal tiene forma circular, pero sólo abarca tres cuartos de una circunferencia de 7 metros de diámetro.
   a) Dibujen en el siguiente recuadro un esquema detallado de la situación planteada para que puedan contestar las siguientes preguntas.

b) ¿Qué volumen de tierra tendrán que sacar de la montaña para hacer el túnel? ______

c) ¿Qué ancho tendrá la carretera en el túnel? ______

d) ¿Cuál es la altura máxima del túnel? ______

7. En una heladería guardan el helado en cilindros metálicos que miden 40 cm de altura y 25 cm de diámetro, un cilindro para cada sabor. Por otro lado, venden barquillos en tres diferentes tamaños: el barquillo chico de 10 cm de diámetro, el mediano tiene 12 cm de diámetro y el grande mide lo mismo de diámetro que de altura.

a) ¿Qué altura tiene el barquillo chico, si su volumen es de 261.79 cm$^3$? ______

b) ¿Qué volumen tiene el barquillo mediano, si su altura es de 13 cm? ______

c) ¿Cuál es el diámetro del barquillo grande, si su volumen es de 883.57 cm$^3$? ______

d) ¿Cuál es el volumen de un cilindro en el que guardan el helado? ______

e) ¿Cuántos barquillos chicos se pueden llenar hasta el borde con un cilindro de helado? ______

f) ¿Cuántos barquillos medianos se pueden llenar con un cilindro? ______

g) ¿Cuántos barquillos grandes se pueden llenar con dos cilindros de helado? ______

h) Completen los siguientes enunciados según corresponda:

- Con un cilindro de helado de chocolate se pueden llenar ______ barquillos chicos y sobran ______ cm$^3$ de helado en el cilindro.
- Con un cilindro de helado de vainilla se pueden llenar ______ barquillos medianos y sobran ______ cm$^3$ de helado en el cilindro.
- Para llenar 50 barquillos grandes se necesitan ______ cilindros completos de helado de fresa y queda un sobrante de ______ cm$^3$ en el último cilindro.

**Saber más...**

Un ingeniero civil se dedica, entre otras cosas, a la construcción de puentes, carreteras, edificios, estadios y toda estructura que sirva para fines pacíficos. Debe tener conocimientos sólidos en Matemáticas, Física y Química. Se puede decir que la ingeniería civil ha existido desde que nació la civilización; grandes obras de ingeniería civil se pueden ver todavía en las ruinas de las pirámides de Egipto y de América Central, en los acueductos romanos y hasta en la Muralla China.

8. Andrés Serrano es un diseñador industrial y desea saber cómo varía el volumen de un recipiente cónico si se mantiene constante el radio en 4.2 cm. Para ello, tabula y grafica sus datos tomando el valor del volumen como una función de la altura, la que piensa variar entre 10 cm y 16 cm.





a) Completen la siguiente tabla, considerando las condiciones del problema de Andrés.

| Radio constante 4.5 cm | | |
|---|---|---|
| Prueba | Altura (cm) | Volumen (cm$^3$) |
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |
| 5 | | |
| 6 | | |
| 7 | | |

b) Tracen la gráfica de esta situación en el siguiente recuadro.

c) ¿Qué tipo de gráfica se obtiene? ______

d) Expliquen qué tipo de variación presenta el volumen del cono con respecto a su altura. ______

e) Según los estándares del mercado, una altura conveniente para el recipiente debe medir entre 12 cm y 15 cm. ¿Qué volúmenes máximo y mínimo corresponden a este **intervalo** de medidas?

Volumen máximo: ______

Volumen mínimo: ______

**Glosario**

**Intervalo.** En matemáticas, es un conjunto de números comprendidos entre dos valores extremos.

9. Ahora, Andrés Serrano desea saber cómo varía el volumen de un recipiente cónico de 13 cm de altura con respecto al radio de su base.

a) Completen la siguiente tabla, considerando el nuevo problema de Andrés.

| Altura constante 13 cm | | |
|---|---|---|
| Prueba | Radio (cm) | Volumen ($cm^3$) |
| 1 | 3 | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |
| 5 | | |
| 6 | 8 | |

b) Tracen la gráfica de esta situación en el siguiente recuadro.

c) ¿Qué tipo de gráfica se obtiene? ______

d) Un radio que permite considerar ergonómico al recipiente varía entre 3.5 cm y 5.5 cm. ¿Cuáles son los volúmenes mínimo y máximo para este intervalo de medidas?

Volumen mínimo: ______

Volumen máximo: ______

d) Expliquen cómo es la variación que muestra el volumen con respecto al radio.

______

10. Encuentren las dimensiones para los recipientes que Andrés diseña respetando las constantes que en cada caso definió, con una condición más, el volumen de ambos debe ser igual a 350 $cm^3$.

a) Recipiente cónico: radio 4.5 cm ______

b) Recipiente cilíndrico: altura 13 cm ______

Comparen sus resultados con los de otros compañeros y reflexionen, con la ayuda de su profesor, acerca de las diferencias que encuentren.





**EJE: MANEJO DE LA INFORMACIÓN**

**TEMA: PROPORCIONALIDAD Y FUNCIONES**

## Contenido 32

Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la Física, la Biología, la Economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades.

### LO QUE SÉ

Analicen en parejas cada una de las situaciones y respondan las preguntas que se plantean.

1. Gloria acaba de cumplir cinco años de antigüedad en su trabajo, por lo que recibirá un bono extra de $5000. Su ingreso normal consta de un sueldo base de $1200 semanal más $50 por cada hora que trabaja. El registro diario de su hora de entrada y salida se muestra en la siguiente tabla.

| Lunes | | Martes | | Miércoles | | Jueves | | Viernes | | Sábado | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| entrada | salida | entrada | salida | entrada | salida | entrada | salida | entrada | salida | entrada | salida |
| 9:00 | 17:00 | 9:30 | 16:00 | 9:30 | 16:30 | 10:00 | 17:00 | 9:30 | 16:00 | 8:00 | 12:00 |

Cada día hay que descontar una hora de la comida, excepto el sábado.

a) ¿Cuántas horas trabaja cada semana? ______

b ¿Qué día trabaja más? ______

c) ¿Cuántas horas trabaja diario, en promedio? ______

d) ¿Cuánto recibirá esta semana incluyendo el bono? ______

e) ¿Cuánto hubiera ganado esta semana sin el bono? ______

f) Si hubiera trabajado de 9:00 a 17:00 horas todos los días, ¿cuánto habría ganado? ______

### PRACTICANDO LO APRENDIDO

Discutan y resuelvan las siguientes situaciones, trabajando en equipos de dos o tres integrantes.

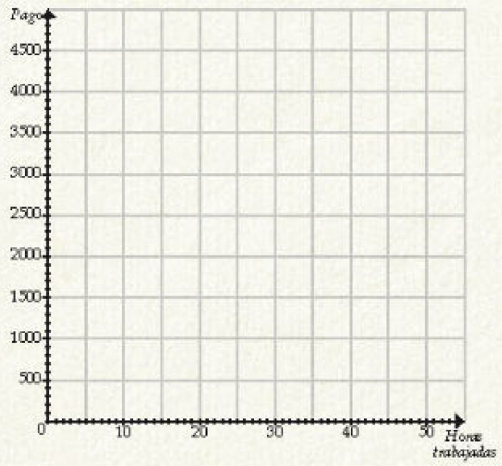
1. Retomando el problema que resolvieron en la sección "Lo que sé", ayudemos ahora al señor González, que es el administrador y se encarga de calcular los pagos. En la compañía hay varios empleados con el mismo régimen de pago que Gloria, por

lo que podría resultarle muy útil tener una función que le permita saber cuánto pagará, con base en las horas trabajadas.

a) Completen la siguiente tabla para que el señor González pueda consultar rápidamente el pago que corresponde a cada intervalo de horas trabajadas. Recuerden que sólo Gloria recibirá el bono de antigüedad.

| Horas trabajadas | Pago ($) |
|---|---|
| 20 | |
| 25 | |
| 30 | |
| 35 | |
| 40 | |
| 45 | |
| 50 | |

b) En el siguiente plano, elaboren la gráfica que contenga los datos de la tabla anterior.




c) Comparen la gráfica que hicieron con las de otros compañeros y analicen las dificultades o diferencias que encuentren.

d) Analicen el comportamiento de los datos en la gráfica y formulen una expresión algebraica que represente la situación de las horas trabajadas y los pagos correspondientes. ______

e) ¿Cuánto recibe Estela, si trabaja 32 horas cada semana? ______

f) Escriban cuál es el sueldo de Luis, si sólo trabaja 25 horas a la semana, ya que estudia en las tardes. ______

g) ¿Cuántas horas debe trabajar Daniel si quiere ganar $3 300 cada semana? ______

h) Ahora contesten, ¿cuál de las tres herramientas resultará más útil para el señor González, la gráfica, la tabla o la expresión algebraica? ______

- Justifiquen su respuesta. ______





## EL RINCÓN MATEMÁTICO

Recordemos que una recta es la representación de una función lineal, por lo que la expresión algebraica tiene la forma $y = ax + b$. Para resolverla, necesitamos encontrar los valores de $a$ y $b$. Si conocemos dos puntos que pertenezcan a la recta, se sustituyen sus respectivas coordenadas de esta manera:

$$y_1 = ax_1 + b \qquad \text{donde } (x_1, y_1) \text{ y } (x_2, y_2) \text{ pertenecen a la recta}$$

$$y_2 = ax_2 + b$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones y obtenemos los valores de $a$ y $b$, para sustituirlos en la función $y = ax + b$.

Por ejemplo, se tienen los puntos (2, 3) y (9, 6) que pertenecen a la misma recta. Formamos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$3 = 2a + b$$

$$6 = 9a + b$$

y al resolverlo encontramos que $a = \frac{3}{7}$ y $b = \frac{15}{7}$. Sustituyendo en la fórmula original, obtenemos la ecuación de la recta: $y = \frac{3}{7}x + \frac{15}{7}$.

De esta manera, contamos con todos los datos numéricos o gráficos para entender claramente el comportamiento de una función lineal.

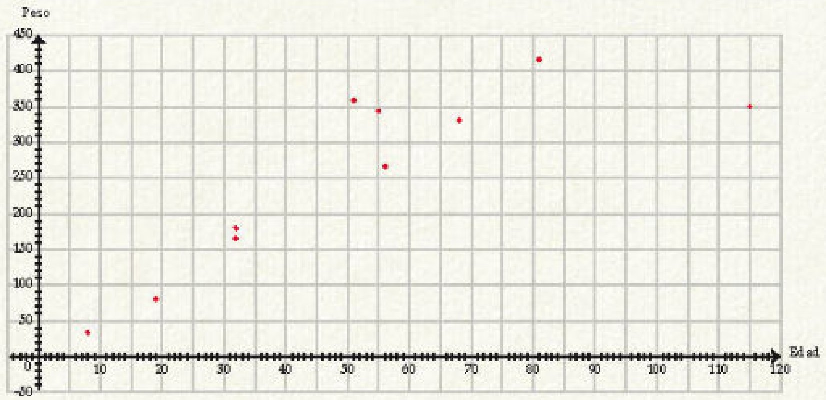
2. En una reserva natural, por cuestiones de salud, se pesa y se mide a la población de osos. En la siguiente tabla se compara la edad y peso de diez machos.

| Edad (meses) | Peso (kg) |
|---|---|
| 19 | 80 |
| 55 | 344 |
| 81 | 416 |
| 115 | 348 |
| 56 | 266 |
| 51 | 360 |
| 68 | 332 |
| 8 | 34 |
| 32 | 180 |
| 32 | 166 |

a) ¿Qué edad tiene el oso de mayor peso? ______

b) ¿Cuánto pesa el oso de mayor edad? ______

c) En la siguiente gráfica se pueden observar los puntos correspondientes a la tabla anterior. No se incluyen todos los puntos en la misma recta, aunque sí se acercan. Dibujen en la misma gráfica, una recta que se aproxime a la mayoría de los puntos.




d) Comparen la recta trazada con las de otros equipos, elijan la que más les agrade y después seleccionen dos puntos, los que parezcan más cercanos a la recta elegida.

e) ¿Cuáles son sus coordenadas?

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| | |
| | |

f) Revisen la sección "Rincón matemático" como apoyo para que contesten: ¿cuál es la ecuación de la recta que trazaron? ____________________

g) Apóyense en la ecuación formulada y escriban cuánto pesa un oso de 20 meses.

____________________

h) ¿Qué peso tendrá un oso al nacer? ____________________

i) ¿A qué edad un oso alcanzará los 100 kg? ____________________

## EL RINCÓN MATEMÁTICO

La *estimación*, en Matemáticas, consiste en encontrar un valor cercano al deseado y se utiliza con regularidad, pues en ocasiones los valores son inaccesibles o imprecisos. La *estimación lineal* consiste en aproximar o modelar el valor de una función ($y$) de acuerdo al comportamiento de una variable independiente ($x$), asumiendo valores cercanos a los que forman parte de la función dada.

### Matemáticas con otras ciencias

En el primer bloque de tu libro de Ciencias I, se habló de la valoración de la biodiversidad, así como de las causas y consecuencias de su pérdida. En diferentes países existen leyes que protegen a las especies en peligro de extinción, pero para determinar el riesgo en que se encuentra una población es necesario estimar el tamaño de las poblaciones silvestres, como en el caso de los pingüinos de Nueva Zelanda, para lo cual trabajan en conjunto biólogos y matemáticos realizando las estadísticas necesarias. Investiga qué población queda actualmente en el mundo de alguna especie del reino animal que se encuentre en peligro de extinción y comparte tu investigación con tus compañeros de grupo.





## EL RINCÓN MATEMÁTICO

Para encontrar los valores de $a$, $b$ y $c$ en ecuaciones de la forma $y = ax^2 + bx + c$, aplicamos un método muy parecido al usado en las ecuaciones lineales. Tomamos tres puntos que pertenezcan a la curva en cuestión, por ejemplo (–1, 5), (2, 11) y (5, 35); los sustituimos en la ecuación inicial, de modo que nos queda un sistema de tres ecuaciones como el siguiente:

$5 = (-1)^2a - b + c$

$11 = (2)^2a + 2b + c$

$35 = (5)^2a + 5b + c$

Despejamos una incógnita de la primera ecuación: $a = b - c + 5$

sustituimos $a$ en la segunda ecuación: $11 = 4(b - c + 5) + 2b + c$

despejamos $b$ y nos queda: $b = \frac{3c - 9}{6}$

ahora sustituimos $a$ y $b$ en la tercera ecuación:

$$35 = 25(b - c + 5) + 5b + c = 25\left(\frac{3c-9}{6}\right) - 25c + 125 + 5\left(\frac{3c-9}{6}\right) + c$$

Simplificando, obtenemos una ecuación con una incógnita:

$$35 = 25(b - c + 5) + 5b + c = 25\left(\frac{3c-9}{6}\right) - 25c + 125 + 5\left(\frac{3c-9}{6}\right) + c$$

$$c = \frac{180}{46}$$

Sustituyendo en las otras dos incógnitas, obtenemos finalmente:

$$a = \frac{71}{46}$$

$$b = \frac{21}{46}$$

Para comprobar que los valores de las tres incógnitas son los correctos, los sustituimos en cualquiera de las tres ecuaciones. Por último, escribimos nuestra ecuación en la forma solicitada $y = \frac{71}{46}x^2 + \frac{21}{46}x + \frac{180}{46}$.

3. Regresando a la situación de los osos de la actividad anterior, ahora trataremos estos datos con una función cuadrática de la forma $y = ax^2 + bx + c$.

a) Completen la tabla con las coordenadas de los puntos usados en la actividad anterior y agreguen el punto (115, 348).

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| | |
| | |
| 115 | 348 |

b) Encuentren los valores de $a$, $b$ y $c$ para una ecuación cuadrática de la forma mencionada que contenga los puntos de la tabla y escriban la función resultante.

____________________

c) Grafiquen la nueva ecuación sobre el plano de la actividad anterior y compárenla con la recta antes graficada.

d) Usen la ecuación encontrada y contesten, ¿cuál es el peso aproximado de un oso de 20 meses? ______

e) ¿Cuál es el peso de un oso de 10 meses? ______

f) ¿Cuáles son las raíces de la ecuación? ______

g) ¿Qué información respecto a los osos nos sugiere las raíces de la ecuación? ______

h) ¿Aproximadamente, a qué edad alcanza el oso su peso máximo? ______

4. Al preparar una dieta para sus animales de laboratorio, una bióloga determina que los animales necesitan 20 onzas de proteínas y 6 onzas de grasa. Ella dispone de dos tipos de alimento, cuyas propiedades se muestran en la siguiente tabla.

| | Proteínas | Grasas |
|---|---|---|
| Alimento A | 20% | 2% |
| Alimento B | 10% | 6% |

a) ¿Qué cantidad de alimento tipo A cubre las necesidades de proteína para los animales de la bióloga? ______

b) ¿Cuánta grasa consumirán los animales comiendo el alimento tipo A?

¿Es la cantidad adecuada? ______

c) ¿Qué cantidad del alimento B cubre las necesidades de proteína? ______

d) ¿Cuánta grasa consumirán los animales comiendo el alimento tipo B?

¿Es la cantidad adecuada? ______

e) Sugieran una cantidad combinada de los alimentos A y B que cubra las necesidades de proteína. ______

f) ¿Cuánta grasa estarían consumiendo con la sugerencia que hicieron?

¿Es la adecuada para la dieta que necesitan los animales? ______

g) Encuentren una expresión algebraica que represente la cantidad exacta de los dos tipos de alimento para cubrir las necesidades de proteína de los animales mencionados. ______

h) Encuentren una expresión algebraica similar a la anterior, pero ahora para la grasa necesaria en la dieta de los animales. ______

i) Combinando las dos expresiones encontradas, formen y resuelvan un sistema de ecuaciones que permita saber la cantidad exacta de cada alimento que la bióloga debe incluir en la dieta de sus animales. ______

**Saber más...**

El primer zoológico conocido en la Ciudad de México data de la época prehispánica. Los conquistadores españoles quedaron sorprendidos al admirar el gran zoológico y aviario que poseía el emperador Moctezuma, el cual fue incendiado durante la conquista. En 1923 se inició la construcción del zoológico de Chapultepec, con una colección de 243 animales.





Actualmente existen en la ciudad varios zoológicos donde los animales reciben los cuidados necesarios, como vacunas, revisiones y dietas balanceadas, bajo la vigilancia de médicos veterinarios, biólogos y nutriólogos. Por ejemplo, cada una de las elefantas del zoológico de Chapultepec come diariamente:

1 ½ paca de alfalfa acicalada
500 g de grenetina
4 lechugas
1 paca de avena
2 pacas de cebada
1 ½ paquetes de pan blanco
3 kg de papaya
1 kg de plátano Tabasco
8 kg de alimento concentrado para caballo
30 kg de zanahoria
500 g de manzana
200 ℓ de agua

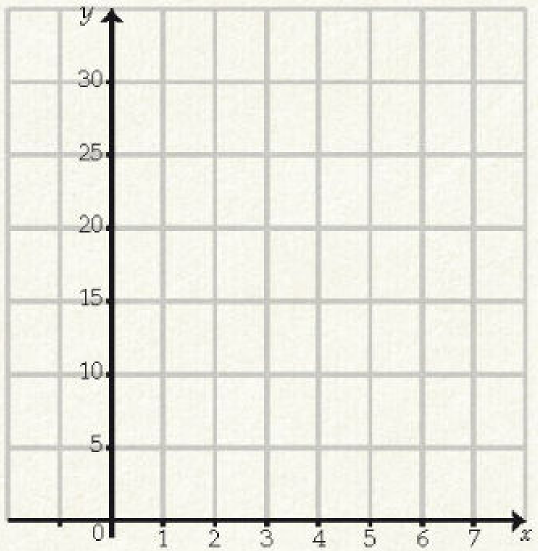
El logotipo del zoológico de Chapultepec es la representación prehispánica de un jaguar.

Entre otros, los zoológicos participan en proyectos de conservación de especies en peligro de extinción. El animal representativo del zoológico de San Juan de Aragón es el lobo gris mexicano, pues éste es el zoológico mexicano que ha registrado el mayor número de nacimientos de esta subespecie en peligro de extinción.

¿Conoces otros zoológicos aparte de los mencionados en esta sección? Coméntalo con tus compañeros.

5. Un estudio de mercado muestra que la cantidad demandada de cierto producto depende del precio de venta, por lo que se recolectan los siguientes datos.

| Precio ($) | Demanda de productos |
|---|---|
| 1 | 3 |
| 2 | 7 |
| 3 | 13 |
| 4 | 22 |
| 5 | 31 |




a) Usen el siguiente plano y grafiquen en él los puntos contenidos en la tabla. Sugieran una curva que corresponda a esta relación.

b) Con la ayuda de su profesor propongan una ecuación que exprese el comportamiento de la función.

c) ¿Para qué precio hay una demanda mayor del producto?

d) ¿Para qué precio hay una demanda menor del producto?

e) ¿Qué demanda tendrá un producto con un precio de $ 2.75?

Comparen sus respuestas con los de otros equipos y reflexionen sobre las diferencias que encuentren. Con la ayuda de su profesor comprueben que sus resultados son correctos.

## APLICANDO LO APRENDIDO

Resuelve de forma individual las siguientes actividades.

1. Dados dos compuestos alimenticios, el primero contiene un 45 % de proteína pura, mientras que el segundo contiene sólo el 17 %. ¿Cuánto debes mezclar de cada uno para obtener 50 kg con un 27 % de proteína?

### Matemáticas con otras ciencias

En el bloque 3 de tu libro de Ciencias 2, estudiaste las escalas de medición de la temperatura, por ejemplo, los grados Fahrenheit y los grados centígrados.

El nombre de la escala Fahrenheit se debe a su inventor, Daniel Gabriel Fahrenheit, quien la propuso en 1724, estableciéndola a partir de tres puntos, el punto cero está determinado al poner el termómetro en una mezcla de hielo, agua y cloruro de amonio; el punto 32 °F se fija con una mezcla de agua y hielo, mientras que el tercer punto, 96 °F, se obtiene al poner el termómetro en la boca o bajo el brazo.

En contraposición, los grados centígrados llevan este nombre por ser la centésima parte entre el punto de fusión del hielo y el punto de ebullición del agua.

2. La siguiente tabla contiene la equivalencia de diferentes medidas de temperatura en grados Fahrenheit y en grados centígrados.

| °F | °C |
|---|---|
| 68 | 20 |
| 100 | 37.77 |
| 122 | 50 |
| 150 | 65.5 |
| 172.4 | 78 |





a) Considerando los datos de la tabla, encuentra la expresión algebraica que te permita convertir grados Fahrenheit a centígrados.

b) Explica detalladamente el procedimiento que seguiste para hallar la ecuación.

c) Utiliza la ecuación que encontraste para completar la siguiente tabla.

| °F | °C |
|---|---|
| 0 | |
| | 0 |
| | 36 |
| 100 | |
| | 100 |

d) Explica si coincidió el cuarto resultado de esta tabla con el que tienes en la tabla anterior.

3. La siguiente tabla muestra el tiempo y la altura alcanzados por los tiros de un jugador profesional de golf, realizados desde un montículo de tierra situado en el comienzo del campo. Sabemos que la pelota lleva una trayectoria parabólica, cuya expresión algebraica tiene la forma $y = ax^2 + bx + c$

| Tiempo (s) | Altura (m) |
|---|---|
| 0 | 6.66 |
| 2 | 38.66 |
| 4 | 28.00 |

a) Encuentra los valores de $a$, $b$ y $c$, que corresponden a la trayectoria trazada por la pelota.

$a =$

$b =$

$c =$

b) Tomando en cuenta los valores obtenidos en el inciso anterior, escribe la función resultante.

c) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota?

d) ¿Cuál es la altura del montículo?

e) ¿Qué altura tiene la pelota luego de tres segundos?

Compara tus respuestas con las de otros compañeros y reflexionen acerca de las diferencias que encuentren, y con la ayuda de su profesor comprueben que sus resultados son correctos.

## EJE: MANEJO DE LA INFORMACIÓN

### TEMA: NOCIONES DE PROBABILIDAD

## Contenido 33

Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables.

### LO QUE SÉ

Desarrollen las siguientes actividades trabajando en equipos de tres o cuatro integrantes.

1. Adrián y Jaime están jugando a tirar los dados. Adrián dice a Jaime: "Si sale seis, tú ganas; y si sale cinco, yo gano".
   a) ¿Sería éste un juego justo? Explica tu respuesta. ____________________
   b) Más adelante, nuevamente Adrián dice: "Si sale más de cuatro, tú ganas; y si sale menos de cuatro, yo gano". ¿Este juego sería justo? ____________________
2. Revisen la siguiente lista de eventos que pueden suceder al jugar a tirar los dados.

| | |
|---|---|
| Uno o dos | Impares |
| Múltiplos de tres | Tres o cinco |
| Menos de cuatro | Más de cuatro |
| Pares | Más de tres |

   a) Elijan tres pares de ellos que permitan realizar un juego justo entre dos personas. Además, deben ser **eventos ajenos**, considerando que no pueden ganar al mismo tiempo los dos jugadores.

3. Se tiene un lote de 20 computadoras, cuatro tienen fallas de *hardware* y para revisarlas se elige una al azar. Con base en esta información, contesten las siguientes preguntas.
   a) ¿Cuántos elementos tiene ese **espacio muestral**? ____________________
   b) ¿Cuál de ellos tiene mayor probabilidad de ocurrir? ____________________
   c) ¿Cuál es la probabilidad, numéricamente, de que la computadora elegida tenga fallas? ____________________
   d) Si ahora se eligen dos computadoras, ¿cuántos elementos tiene el espacio muestral? ____________________
   e) ¿Cuál es la probabilidad de que una de ellas falle? ____________________
   f) ¿Cuál es la probabilidad de que ambas presenten fallas? ____________________
   g) ¿Es éste un espacio *equiprobable*? ____________________

**Glosario**

**Eventos ajenos.** En estadística se dice que dos eventos son mutuamente excluyentes, si no es posible que sucedan ambos al mismo tiempo, es decir, la probabilidad de su intersección es 0. También puede expresarse de la forma $A \cap B = 0$.

**Espacio muestral.** Se define como el conjunto de todos los eventos simples posibles, es decir, incluye todos los resultados posibles de un experimento aleatorio.





### PRACTICANDO LO APRENDIDO

Realicen las siguientes actividades en parejas.

1. Cada año se lleva a cabo el Maratón de la Ciudad de México, al cual se inscriben aproximadamente 17 000 corredores, mientras que en otros maratones sólo asisten cerca de 4 500 atletas.
   a) Si Karina participa en una de estas carreras, ¿de qué depende su probabilidad de ganar? ____________________
   b) ¿La cantidad de corredores inscritos afecta la probabilidad de que gane? __________
   c) Si organizan una carrera con sólo cinco corredores, ¿Karina tendrán más probabilidad de ganar? ____________________

      ¿Y si esos cinco corredores tuvieran los mejores tiempos del año pasado, tendrá la misma oportunidad de ganar? ____________________
2. Para hacer un experimento se alteró un dado rellenando con plomo una de sus caras. La tabla siguiente muestra el registro que se hizo de las 200 veces que fue lanzado.

| puntos | frecuencia |
|---|---|
| 1 | 27 |
| 2 | 31 |
| 3 | 42 |
| 4 | 40 |
| 5 | 28 |
| 6 | 32 |

   a) Expliquen si ahora, al tirar este dado alterado, los resultados siguen siendo equiprobables. ____________________
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que caiga un cuatro? ____________________
   c) Escriban cuál es la probabilidad de que caiga un dos. ____________________
   d) ¿Cuál es la probabilidad de que caiga un seis? ____________________
3. En un salón de clases están organizando un juego de azar en el que cada participante tiene que elegir dos dígitos, sin que puedan repetirse éstos, así que la gama de posibilidades oscila entre el 01 y el 98. Gana quien coincida con los números obtenidos de una tómbola en la que se depositaron papeles con esos números escritos.
   a) ¿Cuántas opciones de elección hay? ____________________
   b) En la siguiente línea anoten cuál es la probabilidad de que salga la combinación que eligió el primer participante. ____________________
   c) Para que el boleto 01 sea uno de los ganadores, ¿cuál es la probabilidad? __________
   d) ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los dos dígitos ganadores sea tres? ____________________
   e) Escriban cuál es la probabilidad de que la suma de los dos dígitos ganadores sea 10. ____________________

**Libroteca**

Te recomendamos que leas el libro:

Bosch Giral, Carlos y Claudia Gómez Wulschner, *Una ventana a la incertidumbre*, México, Santillana, 2002. Puedes encontrarlo en los Libros del Rincón.

## EL RINCÓN MATEMÁTICO

Se dice que cuando los *eventos simples* en un experimento tienen la misma probabilidad matemáticamente de suceder son *equiprobables*.

En el caso de un espacio equiprobable, la coincidencia en la probabilidad se refiere a los eventos simples; en cambio, cuando se tienen *eventos compuestos*, las probabilidades son diferentes, en este caso podemos aplicar la fórmula de la *probabilidad clásica*, sólo debemos tener cuidado en determinar cuántos elementos hay en nuestro evento.

Para calcular el número de elementos que conforman el espacio muestral y cada uno de los eventos, es muy importante considerar si importa el orden o si se pueden repetir los resultados.

4. Para el juego que se mencionó en la actividad anterior, algunos sugirieron que ahora sí se incluyan los números formados por dígitos repetidos, es decir, ahora la gama de posibilidades oscila entre 00 y 99.
   a) ¿Cuántos elementos tiene el nuevo espacio muestral? ______
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que salga ganador el número del primer participante? ______
   c) Para cualquier participante, ¿en cuál de los dos juegos hay más probabilidad de ganar? ______
   d) ¿Ambos son espacios equiprobables? ______
5. ¿Conocen el juego de "Piedra, papel o tijera"? La idea es elegir al azar uno de tres movimientos con las manos, de forma que quien elige la *piedra* le gana a la *tijera*, quien elige la *tijera* le gana al *papel* y quien elige *papel* le gana a la *piedra*.
   a) Cuando dos personas lo juegan y suponiendo que la elección es completamente al azar, ¿cuántas combinaciones se tienen? ______
   b) La siguiente tabla resulta útil para entender mejor la gama de combinaciones que se tiene en este juego. Complétenla y contesten las siguientes preguntas.

| Jugador 1 | Jugador 2 |
|---|---|
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |

TIC

La siguiente página contiene una explicación más detallada de la probabilidad de eventos compuestos, se encuentra disponible en: http://www.educarchile.cl/ech/pro/app/detalle?id=138428 (Consulta: 5 de diciembre de 2016), si la lees cuidadosamente puedes entender mejor este tipo de probabilidad.

   c) ¿Cuál es la probabilidad de que gane el *jugador 1*? ______





   d) ¿Cuál es la probabilidad de que pierda el *jugador 1*? ______
   e) Expliquen si lo consideran un juego justo. ______
6. En esta ocasión, el juego consistirá en tirar dos dados, pero cada uno de los participantes debe elegir el evento que convierta en ganador a alguno de los dos.
   a) Para esto, escriban cuatro eventos que consideren ajenos; recuerden que incluso puede haber elementos del espacio muestral donde nadie gane.
      A: ______ C: ______
      B: ______ D: ______
   b) ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral? ______
   c) ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra un evento simple? ______
   d) ¿Cuál es la probabilidad para cada uno de los eventos que eligieron?
      $P(A)=$ ______ $P(C)=$ ______
      $P(B)=$ ______ $P(D)=$ ______
   e) ¿Quién tiene más probabilidades de ganar? ______
   f) Para reafirmar el inciso e, dentro del equipo, tiren dos dados en 20 ocasiones y registren los resultados. ¿Cuántas veces ganó cada uno?
      A: ______ C: ______
      B: ______ D: ______
7. En un juego de lotería tienen que elegirse seis números entre el 1 y el 42. Gana el premio mayor quien haya escogido los mismos números que saquen de una tómbola, sin importar el orden.
   a) ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral? ______
   b) ¿Cuál es la probabilidad para cada una de estas combinaciones? ______
   c) Expliquen si todas las combinaciones tienen la misma probabilidad de suceder. ______
   d) Cuando alguien elige una combinación, ¿cuál es la probabilidad de que gane? ______

## APLICANDO LO APRENDIDO

Resuelvan los siguientes ejercicios en equipos de tres o cuatro integrantes.

1. En un mazo de 52 cartas hay cuatro palos (*corazones*, *diamantes*, *tréboles* y *picas*), dos de ellos son rojos y dos negros. En cada palo se tiene *A* del 2 al 10, *J* y *K*. El juego consiste en elegir una carta al azar y gana quien saca *corazones*.
   a) ¿Cuál es la probabilidad que tiene alguien de ganar? ______
   b) Expliquen si es justo este juego. ______
   c) En otra modalidad del juego, gana quien obtiene una carta con *J*, *Q* o *K*, sin importar el palo. ¿Cuál es la probabilidad de que alguien gane? ______

d) Expliquen cuál de las dos versiones del juego brinda más probabilidad de ganar.

e) Expliquen detalladamente de qué manera modificarían el juego para que sea justo.

2. Juan y Pedro juegan con dos monedas. Cada uno lanza una moneda al mismo tiempo; si quedan iguales gana Juan, pero si son diferentes gana Pedro.

a) ¿Quién tiene más probabilidad de ganar? ________

b) Juan propone cambiar las reglas, él ganará si sale exactamente un sol y perderá en otro caso. ¿Le conviene a Pedro aceptar la propuesta? ________

c) María se integra al juego con su propia moneda. Ahora lanzan las tres monedas al mismo tiempo y acuerdan que Juan ganará si salen todos *soles*; Pedro, si salen todas *águilas*, y María en cualquier otro caso. ¿Es justo este juego? ________

d) Ahora escriban una propuesta de condiciones para ganar en el mismo juego para que sea un juego justo. ________

**Saber más...**

Existen muchas investigaciones sobre la violencia en el aula, incluso tú mismo puedes ser testigo acerca de esta situación. Un ambiente con tolerancia y donde todos somos escuchados con respeto, es un ambiente donde no tenemos violencia y en el que aprendemos mejor. Como muestra, en la Ciudad de México, 39 % de los estudiantes sufren violencia verbal, según cifras de la SEP disponible en: http://cdhdf.org.mx/wp-content/uploads/2014/05/dfensor_09_2011.pdf (Consulta: 5 de diciembre de 2016.)

3. Para el aniversario de la escuela se hará la rifa de un teléfono celular. La elección del ganador se hará en dos etapas; la primera consistirá en sacar de la tómbola un papel con el grupo ganador, posteriormente, se elegirá un papel con el número de lista del ganador final.

a) Si en la escuela hay 15 grupos y en el grupo de Patricia hay 35 alumnos, ¿cuál es la probabilidad de que gane Patricia? ________

b) El primo de Patricia estudia en la misma escuela, pero en su grupo hay 42 alumnos. ¿Quién tiene más probabilidad de ganar, Patricia o su primo? ________

c) Expliquen si consideran justo este tipo de rifa. ________

4. A Humberto le gusta jugar a adivinar los cumpleaños de sus amigos. Primero lanzan un *volado*, si gana Humberto le dicen el día del mes y él debe adivinar el mes; si pierde, le dicen el mes y él debe adivinar el día. Consideran que todos los meses tienen 30 días.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que Humberto adivine? ________

b) Si cambian las reglas para tratar de adivinar el día del cumpleaños sin lanzar moneda alguna, ¿cuál es la probabilidad de que Humberto gane? ________

c) ¿Cuál de las dos opciones le conviene más a Humberto para ganar? ________

5. Lupita trae un dado y Pera una moneda. Cada una lanzará, moneda o dado, y la que adivine el resultado ganará.

a) ¿Quién tiene mayor probabilidad de ganar? ________

b) Propongan un evento con el que Lupita tenga la misma probabilidad de ganar que Pera.





c) Después llega Luis y quiere participar con los dos dados que él trae. ¿Cuál es un evento para Luis que permita a todos tener la misma probabilidad de ganar? ________

6. En una urna colocan una pelota blanca, cinco rojas y cuatro verdes. Hugo, Paco y Luis sacarán, en ese orden, una pelota al azar y no la regresarán hasta que todos hayan elegido. Gana quien saque la pelota blanca.

a) ¿Quién tiene mayor probabilidad de ganar? ________

b) Calculen la probabilidad de ganar que tiene cada uno de los tres amigos.

$P$ (Hugo) = ________ $P$ (Paco) = ________ $P$ (Luis) = ________

7. Elijan al azar una página de alguno de sus libros y traten de adivinar la primera letra de la página. Cada uno de los miembros del equipo revisará 20 páginas, registrando la primera letra, para que tengan en total 60 u 80 registros.

a) ¿Todas las letras aparecen el mismo número de veces? ________

b) Si el espacio es equiprobable, expliquen por qué se espera que los resultados sean muy parecidos o iguales. ________

8. Un entrenador de futbol debe elegir al capitán de su equipo. Tiene cinco candidatos en iguales condiciones, su idea es elegir tres al azar y darle el puesto al que tenga el número mayor en la camiseta. Los candidatos son los de las camisetas 1, 5, 6, 8 y 10.

a) ¿Cuántas combinaciones diferentes tiene para elegir tres candidatos? ________

b) Suponiendo que cada una de estas combinaciones tiene la misma probabilidad, ¿qué probabilidad tiene cada uno de los cinco candidatos de ser capitán?

$P$ (1) = ________ $P$ (6) = ________ $P$ (10) = ________

$P$ (5) = ________ $P$ (8) = ________

c) ¿Es justa esta forma de elección? ________

- ¿Por qué? ________

9. Un detector de mentiras indica que están mintiendo en el 10 % de los casos en los que la persona está diciendo la verdad, y en el 95 % de los casos en los que la persona miente. En un grupo de diez sospechosos hay sólo un culpable y se elige al azar a la primera persona que pasará al detector.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el detector indique que está mintiendo, sin importar si es o no el culpable? ________

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el detector indique que dice la verdad? ________

c) ¿Cuál es la probabilidad de que sea el culpable? ________

Comparen sus respuestas con las de otros compañeros y reflexionen sobre las diferencias que encuentren. Con la ayuda de su profesor comprueben que sus resultados son correctos.

EVALUACIÓN TIPO PISA

## I. Posada

1. La sociedad de exalumnos de una universidad está organizando una posada para la que esperaban una asistencia de 400 personas. Para cubrir los gastos consideraron vender boletos a $45, pero han vendido más de los calculados. Encuentra la expresión algebraica que represente los ingresos adicionales en términos de los boletos vendidos. ____________

## II. Ramo

1. Sofía compró cierto número de rosas por $ 60, pero al pagar, la vendedora le regaló tres flores, por lo que en realidad pagó $1 menos por cada una. ¿Cuántas rosas tiene Sofía? ____________

## III. Diagonal

1. Para adornar el patio en el próximo festival escolar. Se necesitan cartulinas cuadradas de diferentes tamaños y la siguiente tabla contiene las medidas necesarias para las diagonales y los lados de las cartulinas. Relaciona la medida de cada diagonal con la correcta de cada lado. Escribe la respuesta en la línea correspondiente.

| Diagonal | Lados |
|---|---|
| a) 20 cm | 1. 10.10 cm |
| | 2. 14.14 cm |
| b) 30 cm | 3. 21.21 cm |
| c) 40 cm | 4. 25.25 cm |
| | 5. 28.28 cm |
| d) 50 cm | 6. 35.35 cm |

a) ____________ c) ____________

b) ____________ d) ____________

## IV. Cuestión de simetría

1. Completa la siguiente tabla. Determina para cada una de las secciones cónicas, si son simétricas, y, en su caso, qué tipo de simetría presentan.

| | No es simétrica | Simetría axial | Simetría central |
|---|---|---|---|
| Circunferencia | | | |
| Elipse | | | |
| Parábola | | | |
| Hipérbola | | | |

## V. Una cisterna especial

Se tiene una cisterna con forma de cono. Su base mide 5 metros de radio y 12 metros de altura. Inicialmente, tiene 25 000 litros de agua.

1. Si se llena a razón de 50 litros por segundo, ¿en cuánto tiempo estará llena? ____________
2. ¿En cuánto tiempo el agua tendrá una altura de 10 metros? ____________



EVALUACIÓN TIPO PISA

## VI. Descenso al Maelström

El siguiente pasaje es un extracto del relato de Edgar Allan Poe, *Un descenso al Maelström* (España, Alianza Editorial, 1970).

> En pocos minutos más, una nueva y radical alteración apareció en escena. La superficie del agua se fue nivelando un tanto y los remolinos desaparecieron uno tras otro, mientras prodigiosas fajas de espuma surgían allí donde antes no había nada. A la larga, y luego de dispersarse a una gran distancia, aquellas fajas se combinaron unas con otras y adquirieron el movimiento giratorio de los desaparecidos remolinos, como si constituyeran el germen de otro más vasto. De pronto, instantáneamente, todo asumió una realidad clara y definida, formando un círculo cuyo diámetro pasaba de una milla. El borde del remolino estaba representado por una ancha faja de resplandeciente espuma; pero ni la menor partícula de ésta resbalaba al interior del espantoso embudo, cuyo tubo, hasta donde la mirada alcanzaba a medirlo, era una pulida, brillante y tenebrosa pared de agua, inclinada en un ángulo de cuarenta y cinco grados con relación al horizonte, y que giraba y giraba vertiginosamente, con un movimiento oscilante y tumultuoso, produciendo un fragor horrible, entre rugido y clamoreo, que ni siquiera la enorme catarata del Niágara lanza al espacio en su tremenda caída.

1. Con los datos que el narrador proporciona sobre el remolino, estima su profundidad en metros. Explica qué procedimiento seguiste. ____________
2. ¿Qué volumen tiene el hueco que se forma en el mar con el remolino? ____________
3. ¿Cuántos litros de agua se desplazaron al hacerse el hueco en el mar? ____________

## VII. Una buena patada

La siguiente tabla muestra la altura en diferentes instantes de tiempo que alcanzó un balón después de haber sido pateado por un jugador.

| Tiempo (s) | Altura (m) |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 9 |
| 2 | 16 |
| 3 | 21 |
| 4 | 24 |

1. ¿Cuál de las siguientes expresiones corresponde a la función que relaciona la altura del balón con respecto al tiempo?

a) $y = x^2 - 10x$ b) $y = -x^2 + 10x$ c) $y = x^2 - 3.33x$ d) $y = -3.33x^2 + x$

## VIII. Fichas

En un recipiente hay 30 fichas sin posibilidades de distinguirse al tacto. Cinco de ellas tienen indicado un valor de $ 10 y otras diez indican $ 50, el resto no tiene indicación alguna. Por un precio de $ 7, una persona tiene derecho a elegir una ficha y ganar la cantidad que indique la ficha.

1. ¿Cuál es la probabilidad de ganar $ 3? ____________
2. ¿Cuál es la probabilidad de ganar $ 43? ____________
3. ¿Cuál es la probabilidad de perder $ 7? ____________
4. ¿Es justo este juego? Justifica tu respuesta. ____________

ANEXO

Tabla trigonométrica

| rad | grados | sen | cos | tan | grados | rad |
|---|---|---|---|---|---|---|
| .0000 | 00 | .0000 | 1.0000 | .0000 | 90 | 1.5707 |
| .0175 | 01 | .0175 | .9998 | .0175 | 89 | 1.5533 |
| .0349 | 02 | .0349 | .9994 | .0349 | 88 | 1.5359 |
| .0524 | 03 | .0523 | .9986 | .0524 | 87 | 1.5184 |
| .0698 | 04 | .0698 | .9976 | .0699 | 86 | 1.5010 |
| .0873 | 05 | .0872 | .9962 | .0875 | 85 | 1.4835 |
| .1047 | 06 | .1045 | .9945 | .1051 | 84 | 1.4661 |
| .1222 | 07 | .1219 | .9925 | .1228 | 83 | 1.4486 |
| .1396 | 08 | .1392 | .9903 | .1405 | 82 | 1.4312 |
| .1571 | 09 | .1564 | .9877 | .1584 | 81 | 1.4137 |
| .1745 | 10 | .1736 | .9848 | .1763 | 80 | 1.3953 |
| .1920 | 11 | .1908 | .9816 | .1944 | 79 | 1.3788 |
| .2094 | 12 | .2079 | .9781 | .2126 | 78 | 1.3614 |
| .2269 | 13 | .2250 | .9744 | .2309 | 77 | 1.3439 |
| .2443 | 14 | .2419 | .9703 | .2493 | 76 | 1.3265 |
| .2618 | 15 | .2588 | .9659 | .2679 | 75 | 1.3090 |
| .2793 | 16 | .2756 | .9613 | .2867 | 74 | 1.2915 |
| .2967 | 17 | .2924 | .9563 | .3057 | 73 | 1.2741 |
| .3142 | 18 | .3090 | .9511 | .3249 | 72 | 1.2566 |
| .3316 | 19 | .3256 | .9455 | .3443 | 71 | 1.2392 |
| .3491 | 20 | .3420 | .9397 | .3640 | 70 | 1.2217 |
| .3665 | 21 | .3584 | .9336 | .3839 | 69 | 1.2043 |
| .3840 | 22 | .3746 | .9272 | .4040 | 68 | 1.1868 |
| .4014 | 23 | .3907 | .9205 | .4245 | 67 | 1.1694 |
| .4189 | 24 | .4067 | .9135 | .4452 | 66 | 1.1519 |
| .4363 | 25 | .4226 | .9063 | .4663 | 65 | 1.1345 |
| .4538 | 26 | .4384 | .8988 | .4877 | 64 | 1.1170 |
| .4712 | 27 | .4540 | .8910 | .5095 | 63 | 1.0996 |
| .4887 | 28 | .4695 | .8829 | .5317 | 62 | 1.0821 |
| .5061 | 29 | .4848 | .8746 | .5543 | 61 | 1.0647 |
| .5236 | 30 | .5000 | .8660 | .5774 | 60 | 1.0472 |
| .5411 | 31 | .5150 | .8572 | .6009 | 59 | 1.0297 |
| .5585 | 32 | .5299 | .8480 | .6249 | 58 | 1.0123 |
| .5760 | 33 | .5446 | .8387 | .6494 | 57 | .9948 |
| .5934 | 34 | .5592 | .8290 | .6745 | 56 | .9774 |
| .6109 | 35 | .5736 | .8192 | .7002 | 55 | .9599 |
| .6283 | 36 | .5878 | .8090 | .7265 | 54 | .9425 |
| .6458 | 37 | .6018 | .7986 | .7536 | 53 | .9250 |
| .6632 | 38 | .6157 | .7880 | .7813 | 52 | .9076 |
| .6807 | 39 | .6293 | .7771 | .8098 | 51 | .8901 |
| .6981 | 40 | .6428 | .7660 | .8391 | 50 | .8727 |
| .7156 | 41 | .6561 | .7547 | .8693 | 49 | .8552 |
| .7330 | 42 | .6691 | .7431 | .9004 | 48 | .8378 |
| .7505 | 43 | .6820 | .7314 | .9325 | 47 | .8203 |
| .7679 | 44 | .6947 | .7193 | .9657 | 46 | .8029 |
| .7854 | 45 | .7071 | .7071 | 1.0000 | 45 | .7854 |
| | | cos | sen | cot | deg | rad |





## Bibliografía consultada


IPN, *Álgebra, Libro del estudiante*, México, IPN, 2004.

Jaime Pérez, Patricia, *Geometría analítica*, México, Umbral, 2007.

Philips, Elizabeth, Thomas Butts y Michael Shaughnessy, *Álgebra con aplicaciones*, México, Oxford University Press, 2004.

Ramírez Galarza, Ana Irene, *Geometría analítica, una introducción a la geometría*, México, Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ciencias, 2006.

Raya, Andrés, Alfonso Ríder y Rafael Rubio, *Álgebra y Geometría cuadrática*, España, Netbiblo, 2007.

Tortosa Grau, Leonardo y José Francisco Vicent, *Geometría moderna para ingeniería*, México, Club Universitario, 2012.

Triola, Mario, *Probabilidad y estadística*, 9ª ed., México, Pearson Educación, 2004.


## Bibliografía para el estudiante


Aguilar, Arturo *et al.*, *Geometría y trigonometría*, México, Pearson Educación, 2009.

Geltner, Peter *et al.*, *Geometría y trigonometría*, México, Thomson, 2003.

Pastor, Andrea *et al.*, *Cultura general, matemáticas nivel II*, España, Paraninfo, 2011.

Philips, Elizabeth, Thomas Butts y Michael Shaughnessy, *Álgebra con aplicaciones*, México, Oxford University Press, 2004.

Soret los Santos, Ignacio, *Matemágicas*, España, Esic, 2003.


## Bibliografía para el profesor


Geltner, Peter *et al.*, *Geometría y trigonometría*, México, Thomson, 2003.

IPN, *Álgebra, Libro del estudiante*, México, IPN, 2004.

Miller, Charles D., Venn E. Heeren y John Hornsby, *Matemáticas, razonamiento y operaciones*, 10ª ed., México, Pearson-Adison Wesley, 2006.

Philips, Elizabeth, Thomas Butts y Michael Shaughnessy, *Álgebra con aplicaciones*, México, Oxford University Press, 2004.

Sullivan, Michael, *Álgebra y trigonometría*, 7ª ed., México, Pearson Educación, 2006.

Triola, Mario, *Probabilidad y estadística*, 9ª ed., México, Pearson Educación, 2004.

### Fuentes electrónicas

Productos notables, disponible en http://www.escolares.net/matematicas/productos-notables/

Ecuaciones de segundo grado, disponible en http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Ecuacion_de_segundo_grado/index.htm

Probabilidad, disponible en http://repositorio.educa.jccm.es/portal/odes/matematicas/azar_y_probabilidad/

Trazado de polígonos regulares, disponible en http://ntic.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2001/dibujotecnico/Construcciones%20de%20dibujo%20tecnico/msp_plgl.htm

Matemáticas recreativas, disponible en http://www.acertijos.net/matematicas-recreativas.html

Reloj solar, disponible en http://www.cienciacanaria.es/files/Guia-didactica-de-energia-solar-Relojes-solares.pdf

Zona arqueológica de Cholula, disponible en http://www.inah.gob.mx/es/zonas/12-zona-arqueologica-de-cholula

Características de los prismas, disponible en http://www.ceibal.edu.uy/UserFiles/P0001/ODEA/ORIGINAL/110908_prismas.elp/index.html

Vulcanología, disponible en http://vulcanologia.geofisica.unam.mx/spanish/objetivos.html

Estudio de las cónicas, disponible en http://docente.ucol.mx/rcebrera/swish/index.htm


### Créditos iconográficos

© Depositphotos: pp. 12, 20, 58, 73, 104, 147-148, 156, 159, 162, 198, 218-219. © Shutterstock: pp. 37, 79, 82, 83, 85, 92-93, 116, 127, 202, 224. © Superstock p. 118. Brands of the World: p. 235. **p. 87:** Portada de *Arithmetica*, edición de 1621 de Diofanto, traducido del griego al latín por Claude Gaspar de Bachet de Méziriac, Wikimedia Commons: **p. 113:** *Busto de Tales de Mileto*, Illustrerad verldshistoria utgifven av E. Wallis, volume I, Wikimedia Commons: **p. 202:** *Retrato de Yákov I. Perelmán* (1910), autor desconocido, bibliogid.



Convive con las
# Matemáticas 3

*Convive con las Matemáticas 3* tiene el propósito de que los alumnos desarrollen conocimientos, habilidades y actitudes matemáticas para formular conjeturas y procedimientos que los ayuden a resolver problemas, ya sea dentro del aula o en su vida cotidiana, de esta manera se generan condiciones para concretar, a través de la práctica, los aprendizajes esperados a lo largo de cada uno de los bloques.

Asimismo, presenta situaciones desafiantes en las que los alumnos podrán trabajar a partir de tres ejes: sentido numérico y pensamiento matemático; forma, espacio y medida, y manejo de la información, los cuales son indispensables para estimular el pensamiento matemático.

Este libro está estructurado en secciones y cápsulas; las primeras permitirán que el estudiante recupere sus conocimientos previos para estudiar el contenido de cada bloque y valore el aprendizaje alcanzado.

Las cápsulas tienen la finalidad de operar información complementaria al contenido en cada bloque, esta se relaciona con el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación, datos curiosos o anecdóticos, que permitirán la comprensión del contenido.

Con este texto el estudiante será capaz de interpretar el mundo que lo rodea para hacer frente a un mundo que exige cada vez más una mayor preparación.

DISTRIBUCIÓN GRATUITA
PROHIBIDA SU VENTA

MÉNDEZ CORTÉS MC EDITORES

www.mc-editores.com.mx

ISBN 978-607-7732-54-9